Aufgabe 1

a) Beweisen Sie ohne vollständige Induktion $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$ für alle $n \in IN$

unter Zuhilfenahme der Summenformel für $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$.

Hinweis: Setzen Sie an geeigneter Stelle $n-k=n-1-(k-1)$.

b) Untersuchen Sie $f: IR \to IR, f(x) = \frac{3\sqrt{|x|}-1}{x^2+|x|+2}$ auf Monotonie und Beschränktheit (letzteres durch Herleitung einer oberen Schranke von $|f|$).

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie mit dem Hornerschema p(-2) für

p: $IR \to IR, p(x) := x^7 - x^6 + 3x^4 + 11x^3 + 7x + 12$

b) Geben Sie (ohne Beweis) supA, maxA, infA, minA (bzw. deren Nichtexistenz an) für

A:= $\{\frac{2^n - 3n^2}{n^2+1} \mid n \in IN\}$

c) Bestimmen Sie den Reihenwert von $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n n^2 + (2n)!}{4^n (2n)!}$

Aufgabe 3

Gegeben sei die Folge $(a_n) := \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)$.

a) Zeigen sie anhand der Definition der Konvergenz, dass (a_n) gegen 3 konvergiert.

b) Berechnen Sie den Grenzwert von (a_n) durch Anwendung der Rechenregeln für konvergente Folgen.

c) Beweisen Sie die Konvergenz von (a_n) auf anderem Weg als in a) und b).

Aufgabe 4

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{3n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{n!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{7n-2}$

Aufgabe 5

a) Für welche $x \in IR \setminus \{0\}$ konvergiert und für welche $x \in IR \setminus \{0\}$ divergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n (n+1)} \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes den Wertebereich von

$$f : IR \to IR, f(x) := e^x - x$$

Aufgabe 6

Geben Sie $f'(x)$ an für

a) $f(x) := \dfrac{3x+8}{\sqrt{2x+1} + \dfrac{1}{x}}$ b) $f(x) := \sin(\ln(\cos(e^x + 1)))$

c) $f(x) := (2x+7)^8 ((x^2+3)^5 + 1)^4$

Sie müssen weder die Definitionsbereiche von f und f' angeben noch den entstehenden Ausdruck vereinfachen.

Aufgabe 7

a) Lösen Sie die Gleichung $\ln(1+x) = 1 + \ln(1-x)$ für $x \in]-1,1[$

b) Berechnen Sie $(f^{-1})'\left(\frac{1}{5}\right)$ für f : $\left[-2,2\right] \to IR, f(x) := \dfrac{x}{x^2+4}$

Hinweis: Sie brauchen nicht die Voraussetzungen zu prüfen; es genügt, den gesuchten Wert zu berechnen.

c) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{1 - e^x}$ mit den Regeln von de l'Hopital (die Voraussetzungen brauchen Sie ausnahmsweise nicht zu prüfen!)

Aufgabe 8

a) Bestimmen Sie: $\int x^2 \cos x \, dx$ b) Berechnen Sie: $\int \dfrac{\cos(\tan x)}{\cos^2 x} dx$

c) Lösen Sie mittels Partialbruchzerlegung: $\int \dfrac{5x+1}{(x+1)^2 (x-3)} dx$