

Seminar Digitale Signalverarbeitung

Thema: Diskrete Signale

Alexander Werle

Betreuer:
Dr. Merten Joost

22. Juni 2005
Sommersemester 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Zeitdiskrete Signale	3
1.1	Zeitdiskrete Elementarsignale	4
1.2	Periodische und kausale diskrete Signale	6
1.3	Diskrete Energie- und Leistungssignale	7
2	diskrete LTI-Systeme	10
2.1	Grundlagen	10
2.2	Impulsantwort	10
2.3	Die diskrete Faltung	11

1 Zeitdiskrete Signale

Um einen Einstieg in das bevorstehende Thema der diskreten oder zeitdiskreten Signale zu finden, will ich mit einer Analyse des Begriffs „diskrete Signale“ beginnen.

Es stellt sich zunächst die Frage, was diskret eigentlich bedeutet. In der Mathematik heißt eine Teilmenge M der reellen Zahlen diskrete Teilmenge, wenn es zu jedem Element x von M ein offenes Intervall gibt, das x enthält und sonst keine weiteren Elemente von M . Die Elemente einer diskreten Menge sind anschaulich voneinander isoliert, getrennt.

Beispielsweise ist die Menge der ganzen Zahlen eine diskrete Teilmenge der reellen Zahlen. Die rationalen Zahlen sind dagegen nicht diskret, denn z.B. für die Zahl 0 gibt es kein offenes Intervall, das außer 0 keine andere rationale Zahl enthält.

Kombinieren wir dies nun mit dem Begriff des Signals, als physikalisch messbare Größe, welche sich über die Zeit verändert, so kommen wir zum diskreten Signal und können folgende Definition aufstellen:

Ein diskretes Signal besteht aus zeitlich oder räumlich getrennten Teilen (zum Beispiel sind Rauchzeichen und Morsezeichen diskret). Zu unterscheiden ist das Signal vom Signalträger, der bei der elektrischen Übertragung von Morsezeichen ein kontinuierlicher, elektrischer Strom ist.

Man kann also unter einem diskreten oder zeitdiskreten Signal eine Folge von reellen oder komplexen Zahlen verstehen:

$$\{x[n]\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{\dots, x[-2], x[-1], x[0], x[1], x[2], \dots\} \quad (1)$$

Mit $n \in \mathbb{Z}$ wird ausgedrückt, dass n eine ganze Zahl ist und den Bereich von Minus bis Plus unendlich durchläuft. Eine solche Folge, welche ein diskretes Signal repräsentiert, erhält man beispielsweise durch Abtastung eines zeitkontinuierlichen Signals $x(t)$:

$$x[n] = x(t) |_{t=nT} \quad (2)$$

Der n -te Abtastwert $x[n]$ ist identisch mit dem Gewicht $x(nT)$ des abgetasteten Signals aus folgender Gleichung:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT) \quad (3)$$

$x_s(t)$ ist dabei das abgetastete Signal und setzt sich zusammen aus der Addition der um ein Vielfaches von T verschobenen Duplikate des Dirac-Impulses und deren Gewichte, welche durch die Abtastwerte $x(nT)$ repräsentiert werden. Der Wert $x[n]$ muss jedoch nicht durch Abtastung gewonnen werden. T stellt in diesem Fall das Abtastintervall dar und ist gleich dem Reziproken der Abtastfrequenz f_s :

$$T = \frac{1}{f_s} \quad (4)$$

Da die vorherige Schreibweise mit den geschweiften Klammern unhandlich ist, wird im Folgenden mit $x[n]$ der n -te Abtastwert, aber auch die ganze Sequenz, bezeichnet. Ob es sich um eine Sequenz oder einen Abtastwert handelt

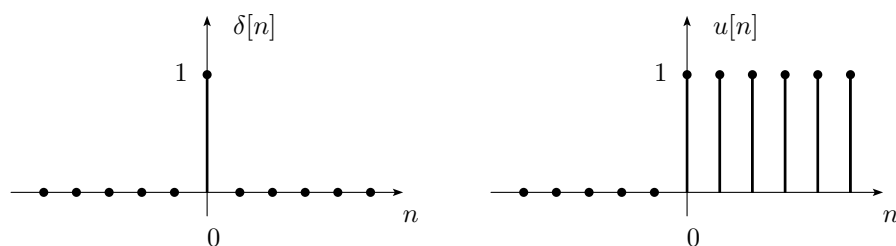


Abbildung 1: Einheitspuls und Einheitsschritt

wird dabei aus dem Kontext ersichtlich. Es ist darauf zu achten, dass $x[n]$ nur für ganzzahlige Werte von n definiert ist, im Gegensatz zum abgetasteten Signal $x_s(t)$, welches zwischen den Abtastpunkten Null ist. Damit es leichter fällt, ein diskretes Signal von einem kontinuierlichen Signal zu unterscheiden, wird bei diskreten Signalen die Vereinbarung getroffen, die unabhängige Variable n zwischen die eckigen Klammern zu setzen. n wird dann als Zeitindex oder diskrete Zeitvariable bezeichnet.

Im Folgenden wird nun auf drei Klassen von zeitdiskreten Signalen eingegangen. Das sind zunächst die zeitdiskreten Elementarsignale, periodische und kausale diskrete Signale und als drittes diskrete Energie- und Leistungssignale.

1.1 Zeitdiskrete Elementarsignale

Unter dem Oberbegriff zeitdiskrete Elementarsignale sollen hier drei Folgen angesprochen werden, die Impulsfolge, die Sprungfolge und die komplexe Exponentialfolge.

Die Impulsfolge, auch als Einheitspuls oder diskreter Diracpuls bezeichnet, hat für alle $n \neq 0$ den Wert Null und nur für $n = 0$ den Wert Eins. Schaut man sich Abbildung 1 an, wird der Bezug zum Diracimpuls deutlich. Die vollständige Definition ist wie folgt:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & : n \neq 0 \\ 1 & : n = 0 \end{cases} \quad (5)$$

In Analogie zur kontinuierlichen, kausalen Schrittfunktion wird die Sprungfolge, auch Einheitsschritt genannt, definiert. Auch hier kann die Sprungfolge als das diskrete Pendant der Schrittfunktion bezeichnet werden.

$$u[n] = \begin{cases} 0 & : n < 0 \\ 1 & : n \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Als kleine Erweiterung zum Einheitspuls soll noch die Folge $\delta[n - i]$ erwähnt werden, welche den um i Abtastintervalle verschobenen Einheitspuls darstellt. Mit ihrer Hilfe ist es möglich jedes diskrete Signal $x[n]$ nach folgender Vorschrift in seine Einzelteile zu zerlegen:

$$x[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \delta[n - i] \quad (7)$$

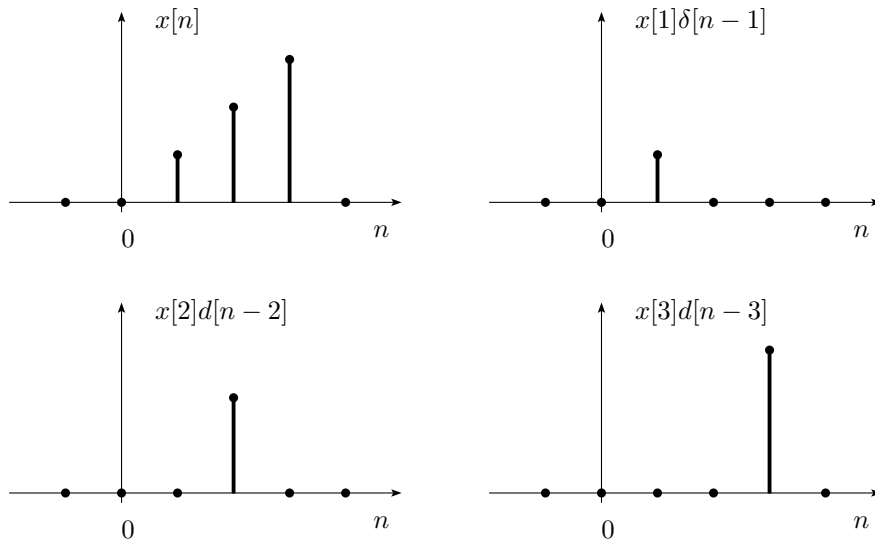


Abbildung 2: Sägezahn zerlegt in zeitverschobene, gewichtete Einheitspulse

Analog zu Formel (3) aus der Abtastung, setzt sich das Signal $x[n]$ zusammen aus der Addition mehrerer verschobener Einheitspulse und dem durch $x[i]$ symbolisierten Gewicht zum Abtastintervall i . Abbildung 2 zeigt die Zerlegung eines Sägezahnimpulses in seine zeitverschobenen, gewichteten Einheitspulse.

Als letztes will ich mich nun der komplexen Exponentialfolge widmen, welche auch als „diskrete, komplexe Sinusschwingung“ bekannt ist. Ihre Definition basiert auf der Abtastung der komplexen Exponentialfunktion:

$$x[n] = \hat{X} e^{j2\pi f_0 n T} \quad (8)$$

\hat{X} ist der Scheitelwert oder die Amplitude, f_0 die Frequenz der komplexen Exponentialfunktion. Der Scheitelwert irritiert im Zusammenhang mit Exponentialfunktion ein wenig. Verdeutlicht man sich jedoch, dass sich die komplexe Exponentialfunktion nach der Eulerschen Formel als Addition der Cosinusschwingung und dem Produkt aus imaginärer Zahl j und der Sinusschwingung ergibt, so macht der Scheitelwert durchaus Sinn. Die in der komplexen Exponentialfunktion vorhandene Zeitvariable t wird im diskreten Pendant durch das n -fache des Abtastintervalls ersetzt.

Zerlegen wir die komplexe Exponentialfolge in Real- und Imaginärteil, so erhalten wir, analog zur komplexen Exponentialfunktion, die Cosinus- und Sinusfolge:

$$\Re\{\hat{X} e^{j2\pi f_0 n T}\} = \hat{X} \cos(2\pi f_0 n T) \quad \text{und} \quad \Im\{\hat{X} e^{j2\pi f_0 n T}\} = \hat{X} \sin(2\pi f_0 n T) \quad (9)$$

Setzen wir daraus, in Anlehnung an die Eulersche Formel, die komplexe Exponentialfolge zusammen, kommen wir zu folgender Formel:

$$x[n] = \hat{X} \cos(2\pi f_0 nT) + j\hat{X} \sin(2\pi f_0 nT) \quad (10)$$

1.2 Periodische und kausale diskrete Signale

Ein diskretes Signal $x_p[n]$ wird als periodisches Signal bezeichnet, mit der Periode N , wenn es die folgende Bedingung erfüllt:

$$x_p[n] = x_p[n + N] \quad (11)$$

Dabei ist N eine natürliche Zahl, d.h. $N \in \mathbb{N}$ und die fundamentale Periode ist die kleinste natürliche Zahl N , welche die Bedingung erfüllt. Im Allgemeinen ist unter dem Begriff Periode dieser Wert zu verstehen.

Beispiel 1: Die diskrete Sinusschwingung $x[n] = \sin(2\pi f_0 nT)$ ist im Allgemeinen kein periodisches diskretes Signal, wie die Abbildung 3 ($f_0 = 95\text{Hz}, T = 1\text{ms}$) zeigt. Betrachten wir jedoch die Sinusschwingung $x_p[n]$ im Vergleich dazu ($f_0 = 100\text{Hz}, T = 1\text{ms}$), so wird deutlich, dass es sich hier um ein periodisches Signal handelt, mit der Periode $N = 10$, da die Bedingung für die Periodizität erfüllt ist.

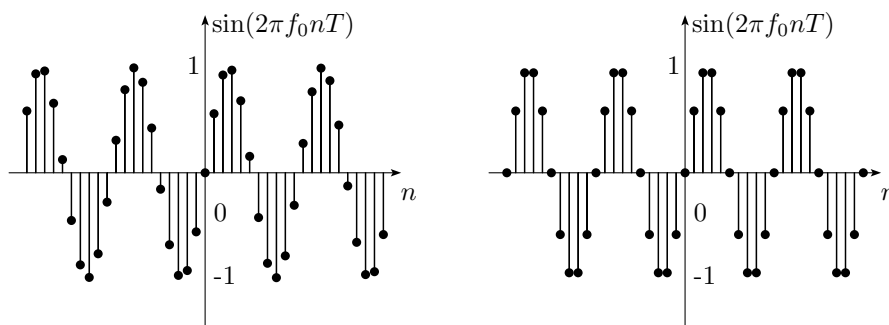


Abbildung 3: links ($f_0 = 100\text{Hz}, T = 1\text{ms}$) und rechts ($f_0 = 95\text{Hz}, T = 1\text{ms}$)

Unter einem kausalen diskreten Signal $x_{cs}[n]$ verstehen wir ein diskretes Signal, das auf der negativen Zeitachse Null ist:

$$x_{cs}[n] = \begin{cases} x[n] & : n \geq 0 \\ 0 & : n < 0 \end{cases} \quad (12)$$

Das bekannteste kausale Signal ist der bereits behandelte Einheitschritt $u[n]$ aus Formel 6. Mit ihm ist man in der Lage, mit Hilfe von Multiplikation jedes Signal kausal zu machen.

1.3 Diskrete Energie- und Leistungssignale

In der Definitionsgleichung 1 ist bereits angedeutet, dass ein zeitdiskretes Signal auch als Vektor betrachtet werden kann. Dabei können Vektoren endlich oder unendlich viele Elemente besitzen und in Form einer Zeile dargestellt werden. Wenn keine explizite Angabe gemacht wird, versteht man unter einem Vektor \mathbf{x} oder \mathbf{y} immer einen Spaltenvektor. Das Umwandeln eines Zeilenvektors in einen Spaltenvektor und umgekehrt geschieht mit Hilfe von Transponierung, die hinlänglich bekannt ist. Gekennzeichnet wird die Transponierung mit dem Symbol T . Für ein diskretes Signal \mathbf{x} oder \mathbf{y} in Vektorform kann man somit schreiben:

$$\mathbf{x} = [\cdots, x[-1], x[0], x[1], \cdots]^T \quad (13)$$

$$\mathbf{y} = [\cdots, y[-1], y[0], y[1], \cdots]^T \quad (14)$$

Für zwei Signale können wir jetzt ein Skalarprodukt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ wie folgt definieren:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] \quad (15)$$

Bei $y^*[n]$ handelt es sich um den konjugiert komplexen Wert von $y[n]$. Für reelle Signale, wie sie in der Praxis häufig vorkommen, sind die beiden Werte identisch, da der Imaginärteil wegfällt, d.h. es gilt: $y^*[n] = y[n]$.

Im Fall von Signalen endlicher Dauer, d.h. bei Signalen, welche Null sind unterhalb einer Grenze n_1 und oberhalb einer Grenze n_2 , besteht das Skalarprodukt aus einer Summe mit endlich vielen Summanden, so dass sich folgende Definition für das Skalarprodukt ergibt:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]y^*[n] \quad (16)$$

Noch eleganter lässt sich das Skalarprodukt als Produkt eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor ausdrücken:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^H \mathbf{x} \quad (17)$$

In dieser Formel ist \mathbf{y}^H der sogenannte Hermitesche Vektor. Dieser lässt sich so erklären, dass zunächst der komplex konjugierte Wert von \mathbf{y} gebildet wird und dieser anschließend transponiert wird.

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}^*]^T \quad (18)$$

Auch hier lässt sich ergänzen, dass bei reellen Signalen $\mathbf{y}^H = \mathbf{y}^T$ gilt, da der Imaginärteil Null ist.

Das folgende Rechenbeispiel soll die getroffene Definition des Skalarproduktes in seiner praktischen Anwendung zeigen.

Beispiel 1: $\mathbf{x} = [1 - j, 1 + j]^T$ und $\mathbf{y} = [1, j]^T$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \mathbf{y}^H \mathbf{x} \\ &= [1, -j] \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & +j \end{bmatrix} \\ &= (1 - j) + (-j)(1 + j) \\ &= 2 - j2 \end{aligned} \tag{19}$$

Kommen wir nun zur eigentlichen Definition der Energie W eines diskreten Signals $x[n]$, welche sich folgendermaßen darstellt:

$$W = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \tag{20}$$

Oder in der entsprechenden Vektorform:

$$W = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^H \mathbf{x} \tag{21}$$

Falls die Energie W eines Signals endlich ist, also $0 < W < \infty$, so spricht man von einem *Energiesignal*. Ein Beispiel für ein solches Signal ist der Einheitspuls in Abbildung 1.

Der zweite Begriff, dessen Definition noch offen steht, ist die Leistung P . Viele Signale mit einer unendlichen Energie haben eine endliche mittlere Leistung. Sie ist folgendermaßen definiert:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 \tag{22}$$

Für periodische Signale $x_p[n]$ mit der Periode N folgt daraus:

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x_p[n]|^2 \tag{23}$$

Ist die mittlere Leistung eines Signals endlich und ungleich Null, so bezeichnet man es als diskretes *Leistungssignal*. Ein Beispiel dafür ist die Sprungfolge aus Formel 6.

Eine weitere Möglichkeit, um die Energie eines Signals zu beschreiben, ist die Norm. Unter der Norm eines diskreten Energiesignals versteht man folgenden Ausdruck:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \tag{24}$$

Wie aus der linearen Algebra bekannt, kann man sich unter der Norm die Länge eines Vektors und somit auch eines diskreten Signals vorstellen. Aus der Gleichung 21 folgt nun für die Energie:

$$W = \|\mathbf{x}\|^2 \tag{25}$$

Nimmt man sich nun die Norm zur Hilfe, kann man mit ihr auch den Abstand $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ zweier Signale definieren:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \tag{26}$$

Kombinieren wir die beiden Definitionen aus 25 und 26 so gelangen wir zu einer eleganten Darstellung des Signal-Geräusch-Verhältnisses (engl: signal to noise ratio, SNR), einem wichtigen Qualitätsmaß in der Nachrichtentechnik. Dies lässt sich dabei folgendermaßen darstellen:

$$SNR = \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|} \quad (27)$$

Dabei versteht man unter \mathbf{x} das Nutzsignal und unter $\hat{\mathbf{x}}$ das gestörte Nutzsignal. Die Differenz $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ der beiden Signale wird dann als Fehler-signal (engl: error signal) \mathbf{e} interpretiert und die Norm $\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|$ kann dazu genutzt werden, den Abstand zwischen gestörtem und ungestörtem Nutzsignal zu repräsentieren.

In der Praxis ist oftmals das SNR in dB von Interesse. Dies lässt sich mit Hilfe zweier Skalarprodukte einfach berechnen:

$$SNR \text{ in } dB = 10 \log\left(\frac{\mathbf{x}^H \mathbf{x}}{\mathbf{e}^H \mathbf{e}}\right) \quad (28)$$

Wie zu sehen bringt die Darstellung diskreter Signale in Form von Vektoren eine Fülle an Vorteilen mit sich. So lassen sich die Signale und die diversen Operationen auf ihnen kompakt und elegant darstellen. Wie schon des öfteren erwähnt, können viele der in der linearen Algebra erlernten Instrumente somit für die DSV eingesetzt werden. Desweiteren geht auch der Trend in der DSV eindeutig in Richtung Matrizenrechnung, welche auch ein Teilgebiet der linearen Algebra darstellt.

2 diskrete LTI-Systeme

2.1 Grundlagen

Digitalfilter sind Realisierungen linearer, zeitinvarianter, diskreter Systeme. Deshalb stellt die Klasse der zeitdiskreten LTI-Systeme (engl: *linear time invariant discrete-time systems*) die wichtigste Klasse zeitdiskreter Systeme dar. Allgemein versteht man unter einem zeitdiskreten System ein System, das ein zeitdiskretes Eingangssignal $x[n]$ zu einem zeitdiskreten Ausgangssignal $y[n]$ verarbeitet. Um zu einem zeitdiskreten LTI-System zu gelangen, muss zusätzlich die Bedingung der Linearität und der Zeitinvarianz durch das zeitdiskrete System erfüllt werden.

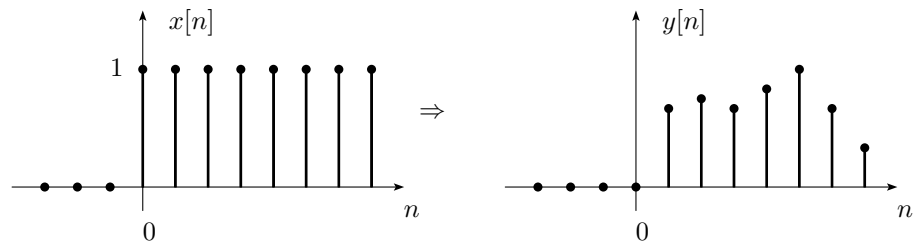


Abbildung 4: Beispiel eines zeitdiskreten Systems

Die Linearitätsbedingung lautet:

$$x[n] = k_1 x_1[n] + k_2 x_2[n] \Rightarrow y[n] = k_1 y_1[n] + k_2 y_2[n] \quad (29)$$

Dies bedeutet, dass ein System linear ist, falls das Eingangssignal $x[n] = k_1 x_1[n] + k_2 x_2[n]$ das Ausgangssignal $y[n] = k_1 y_1[n] + k_2 y_2[n]$ bewirkt. Dabei sind $x_1[n]$ und $x_2[n]$ zwei beliebige Eingangssignale und $y_1[n]$ und $y_2[n]$ die dazugehörigen Ausgangssignale. k_1 und k_2 sind zwei Konstanten, die sowohl im Eingangssignal als auch im Ausgangssignal den selben Wert haben.

Die Zeitinvarianzbedingung lautet:

$$x[n - i] \Rightarrow y[n - i] \quad (30)$$

Ein System ist also zeitinvariant, wenn ein um i Abtastintervalle verzögertes Eingangssignal $x[n - i]$ ein um i Abtastintervalle verzögertes Ausgangssignal $y[n - i]$ bewirkt. i kann eine beliebige ganze Zahl sein und $y[n]$ ist das zum Eingangssignal $x[n]$ gehörende Ausgangssignal.

Die Grundlagen für ein LTI-System sind damit festgelegt und es kann die Betrachtung einer möglichen Charakterisierung von LTI-Systemen erfolgen, der Impulsantwort.

2.2 Impulsantwort

Wie bereits erwähnt, kann ein LTI-System durch seine sogenannte Impulsantwort $h[n]$ charakterisiert werden. Unter der Impulsantwort versteht man das

Ausgangssignal $y[n]$ eines LTI-Systems, welches entsteht, wenn an seinen Eingang der Einheitspuls $x[n] = \delta[n]$ angelegt wird (siehe Abbildung 1). Es ergibt sich somit die Folgerung:

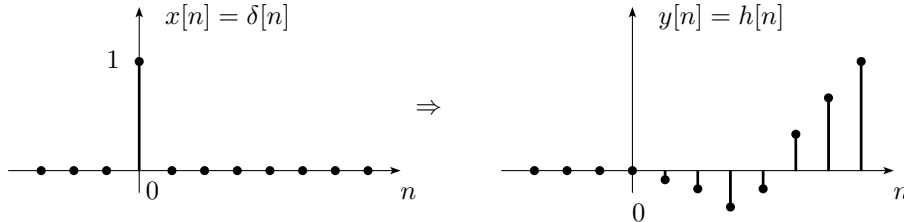


Abbildung 5: Mögliche Impulsantwort zum Input $\delta[n]$

$$x[n] = \delta[n] \Rightarrow y[n] = h[n] \quad (31)$$

Die Impulsantwort kann dazu genutzt werden, die Kausalität und Stabilität eines zeitdiskreten LTI-Systems zu definieren. Ein zeitdiskretes LTI-System heisst kausal, wenn seine Impulsantwort kausal ist, also auf der negativen Zeitachse Null ist:

$$h[n] = 0 \text{ für } n < 0 \quad (32)$$

Alle Echtzeitsysteme in der DSV sind kausal und kommen in der Praxis deshalb am häufigsten vor. Ein nichtkausales System kann man als hellseherisches System bezeichnen, denn sein Ausgang antwortet auf einen Impuls, welcher erst in der Zukunft stattfindet. Nichtkausale Systeme spielen hauptsächlich in der Theorie der linearen Systeme eine Rolle, in der Praxis kommen sie nur in Form von Offline-Anwendungen vor.

Für die Stabilität eines LTI-Systems gilt, dass die Impulsantwort absolut summierbar sein muss:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \quad (33)$$

Hierzu lässt sich anmerken, dass alle Digitalfilter, die als zeitdiskrete LTI-Systeme realisiert werden, stabil sein müssen.

2.3 Die diskrete Faltung

Aufbauend auf der Definition eines LTI-Systems und der Charakterisierung durch die Impulsantwort, kommen wir nun zur diskreten Faltung. Es sei ein zeitdiskretes LTI-System gegeben mit der Impulsantwort $h[n]$. Laut der zuvor getroffenen Definition verursacht der Einheitspuls $\delta[n]$ am Eingang des Systems die Impulsantwort $h[n]$ an seinem Ausgang:

$$\delta[n] \Rightarrow h[n] \quad (34)$$

Da das LTI-System laut Definition zeitinvariant ist, folgt daraus:

$$\delta[n - i] \Rightarrow h[n - i] \quad (35)$$

Wird der Einheitspuls, der zum Zeitpunkt $n = i$ auftritt, nun mit dem dazugehörigen Abtastwert $x[i]$ gewichtet, dann folgt daraus die Linearität aus Definition 29:

$$x[i]\delta[n - i] \Rightarrow x[i]h[n - i] \quad (36)$$

Gehen wir noch einen Schritt weiter und bilden eine gewichtete Summe von zeitverschobenen Einheitspulsen, dann folgt gleichermaßen aus der Definition der Linearität:

$$\underbrace{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]\delta[n - i]}_{x[n]} \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]h[n - i]}_{y[n]} \quad (37)$$

Wie in Formel 7 bereits gezeigt, ist die linke Summe aus Folgerung 37 nichts anderes als das Eingangssignal $x[n]$. Somit ist das zeitdiskrete Ausgangssignal $y[n]$ des LTI-Systems durch die rechte Summe gegeben. Man bezeichnet jene Summe als Faltungssumme oder einfach als diskrete Faltung (engl: discrete convolution). In kürzerer Form kann man sie auch folgendermaßen darstellen:

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (38)$$

Dies bedeutet, dass das Ausgangssignal eines linearen zeitinvarianten Systems gleichgesetzt werden kann mit dem Eingangssignal, gefaltet mit der Impulsantwort des Systems.

Wie die kontinuierliche Faltung, ist auch die diskrete Faltung kommutativ.

Für das Verständnis des Faltungsprozesses ist es von zentraler Rolle, den Unterschied zwischen einem Signal und einem Abtastwert sicher erkennen zu können. Aus diesem Grund wird im Folgenden für ein Signal y , welches auf der diskreten n -Achse definiert ist, $\{y[n]\}$ geschrieben und für den n -ten Abtastwert $y[n]$. Der gesamte Faltungsprozess lässt sich durch folgende, sequenziell abzuarbeitende Schritte, beschreiben:

1. Ersetze die diskrete Zeitvariable n sowohl in Signal als auch in Abtastwert durch die Summationsvariable i .
2. Falte $\{h[i]\}$ um die Ordinate. Dies bedeutet nichts anderes, als $\{h[i]\}$ um die Ordinate zu klappen, so dass sich das gespiegelte Signal $\{h[-i]\}$ ergibt.
3. Verschiebe $\{h[-i]\}$ um n_f Abtastpunkte nach rechts, so dass sich $\{h[n_f - i]\}$ ergibt. n_f kann hier zunächst beliebig, aber geeignet, gewählt werden.
4. Multipliziere nun das Signal $\{x[i]\}$ mit der modifizierten Impulsantwort $\{h[n_f - i]\}$, so dass sich das Signal $\{x[i]h[n_f - i]\}$ ergibt.
5. Addiere nun für $i = -\infty$ bis $i = +\infty$ alle entstandenen Werte $x[i]h[n_f - i]$ zusammen und erhalte den Abtastwert $y[n_f]$ an der Stelle n_f .
6. Führe die Schritte 3 bis 5 nun für alle Punkte n auf der diskreten Zeitachse aus, so dass sich das zeitdiskrete Ausgangssignal $\{y[n]\}$ ergibt.

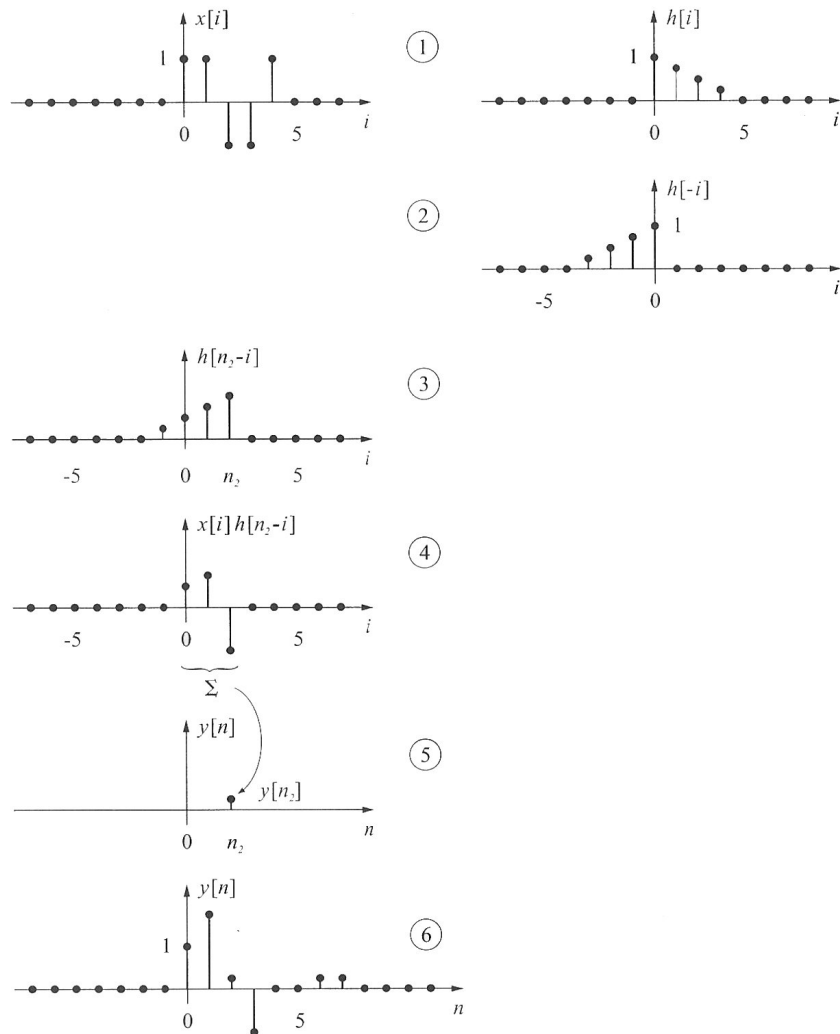


Abbildung 6: diskrete Faltung

Es ist noch anzumerken, dass das Ausgangssignal $\{y[n]\}$ an Länge zunimmt, denn für die Faltung zweier endlich langer, zeitdiskreter Signale gilt die Vorschrift:

$$N_y = N_x + N_h - 1 \quad (39)$$

Es gilt also, dass die Länge N_y des Ausgangssignals gleich der Länge N_x des Eingangssignals plus die um 1 verringerte Länge N_h der Impulsantwort ist.

Die rechte Summe aus Folgerung 37 kann auch als Rechenvorschrift zur Bestimmung des Ausgangssignals angesehen werden.

Wir werden jedoch im Anschluss an diesen Seminar-Vortrag sehen, dass es im Allgemeinen effizientere Verfahren gibt, um das Ausgangssignal eines LTI-Systems zu berechnen.

Literatur

- [AVO91a] ALAN V. OPPENHEIM, ALAN S. WILLISKY: *Signale und Systeme Arbeitsbuch*. Wiley VCH, 1991.
- [AVO91b] ALAN V. OPPENHEIM, ALAN S. WILLISKY, JAN T. YOUNG: *Signale und Systeme Lehrbuch*. Wiley VCH, 1991.
- [vG02] GRUENIGEN, DANIEL CH. VON: *Digitale Signalverarbeitung*. Fachbuchverlag Leipzig/Hanser Verlag, 2002.
- [Web] *Wikipedia*. <http://www.wikipedia.org>.