Seminar Digitale Signalverarbeitung
Thema: Digitale Filter

Autor: Daniel Arnold

Universität Koblenz-Landau, August 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Allgemeine Informationen

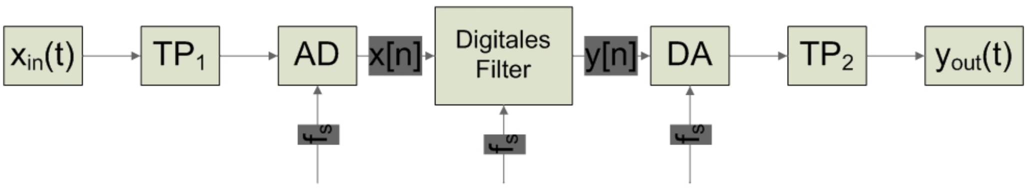
Digitale Filter sind das klassische Anwendungsgebiet in der digitalen Signalverarbeitung. Die Theorie ist im Wesentlichen seit über 30 Jahren bekannt. Im Tieffrequenzbereich bis ca. 100 kHz haben digitale Filter die analogen Filter in ihrer Bedeutung überholt. Durch leistungsstärkere Prozessoren werden sich die Frequenzgrenzen in Zukunft entsprechend nach oben verschieben.

2 Allgemeines

2.1 Was versteht man unter einem Filter?

Ein Filter ist ein System, das gewisse Frequenzkomponenten im Vergleich zu anderen verändert (z.B. verstärkt, unterdrückt oder in der Phase verschiebt). Unter diesen Systemen spielen die stabilen und kausalen LTI-Systeme (Linear Time Invariant Systems) die wichtigste Rolle. Diese Systeme lassen sich durch eine rationale Übertragungsfunktion mit reellen Koeffizienten beschreiben. Solche Filter werden auch als lineare Filter bezeichnet.

2.2 Aufbau eines Digitalen Filters



Man hat ein zeitkontinuierliches Eingangssignal $x_{in}(t)$. Im vorherigen Referat wurde etwas gesagt über den Alias-Effekt[1]. Will man diesen Effekt unterdrücken, dann muss die Abtastfrequenz doppelt so hoch sein wie die höchste Frequenzkomponente des Eingangssignals. Da man die höchsten Frequenzkomponenten nicht voraussagen kann bzw. man die Abtastfrequenz nicht beliebig hoch wählen kann, benutzt man um diesen Effekt zu unterdrücken einen Tiefpassfilter, auf den das Eingangssignal geführt wird. Dieser Tiefpassfilter wirkt somit als Antialiasing-Filter. Dadurch wird die Bandbreite des Eingangssignals beschränkt.

Anschließend wird das gefilterte Signal in einem AD-Wandler mit der Frequenz f_s abgetastet und in eine Zahlenfolge verwandelt. Das Resultat ist ein digitales Signal x[n]. (Wird auch bezeichnet als Folge, Sequenz, zeitdiskretes Signal oder einfach als diskretes Signal). Dieses digitale Eingangssignal kommt dann in den digitalen Filter. Dieser digitale Filter besteht aus einem digitalen Rechner, der aus dem digitalen Eingangssignal Wert für Wert das digitale Ausgangssignal y[n] errechnet.

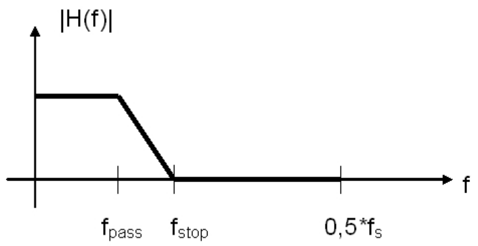
Das Ausgangssignal y[n] kommt nun in einen DA-Wandler, der die Zahlenfolge in eine zeitkontinuierliche, treppenförmige Spannung umsetzt.

[1] Zur Einnerung: Dieser Effekt entsteht, wenn das Eingangssignal Frequenzteile oberhalb der halben Abtastfrequenz hat. Dann überlappen sich die Spektren des Eingangs- und Ausgangssignals. Im Überlappungsbereich kann nicht mehr zugeordnet werden, ob das Signal zum Eingangs- oder Ausgangssignal gehört hat.

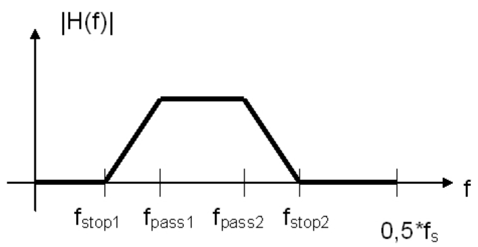
Abschließend kommt das Signal noch einmal in einen Tiefpassfilter, um das Signal zu glätten.

2.3 Filterfunktionen

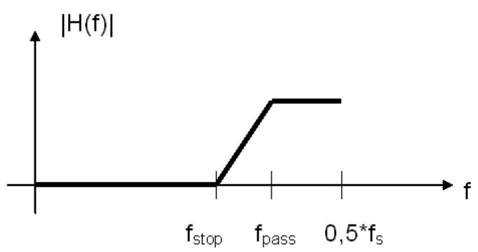
Die klassischen Filterfunktionen sind Tiefpass-, Bandpass-, Hochpass- und Bandsperrenfilter.



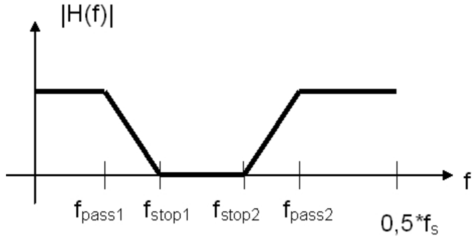
Tiefpassfilter: Ein Tiefpassfilter lässt nur Frequenzen unterhalb einer bestimmten Grenzfrequenz ungeschwächt durch.



Bandpassfilter: Der Bandpassfilter lässt ein bestimmtes Frequenzband durch. Unterhalb und oberhalb einer bestimmten Grenzfrequenz werden die Frequenzbereiche gesperrt bzw. deutlich abgeschwächt.



Hochpassfilter: Ein Hochpassfilter lässt nur Frequenzen oberhalb einer bestimmten Grenzfrequenz ungeschwächt durch.



Bandsperrenfilter: Im Gegensatz zum Bandpassfilter sperrt der Bandsperrenfilter einen gewissen Frequenzbereich.

2.4 Digitalfilter als LTI-Systeme

Wie eben erwähnt ist ein Digitalfilter ein stabiles und kausales LTI-System. Zur Wiederholung:
Ein LTI-System heißt kausal, wenn seine Impulsantwort kausal ist:

$$h[n]=0 \text{ für } n<0$$

In der praktischen digitalen Signalverarbeitung sind LTI-Systeme immer kausal. Ein nichtkausales System wäre ein hellseherisches System. D.h., am Ausgang wird auf einen Impuls reagiert, der in der Zukunft liegt.
Ein LTI-System heißt stabil, wenn seine Impulsantwort absolut summierbar ist:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n] < \infty|$$

Wie bereits oben erwähnt lässt sich ein digitales Filter als LTI-System mit einer rationalen Übertragungsfunktion mit reellen Koeffizienten beschreiben.

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + ... + a_M z^{-M}}$$

H(z) beschreibt das Übertragungsverhalten des Systems. Die größere der beiden Zahlen N und M beschreiben die Ordnung des Systems. Sind alle a_i Koeffizienten gleich 0, dann spricht man von einem nichtrekursiven LTI-System oder einfach von einem FIR-Filter, ansonsten spricht man von einem rekursiven LTI-System oder einfach von einem IIR-Filter. Laut Kapitel z-Transformation ist die Übertragungsfunktion H(z) die wichtigste Größe eines diskreten LTI-Systems. Die Aufgabe ist es nun, H(z) für eine gegebene Aufgabenstellung zu bestimmen.

$$H(f) = H(z)|_{z=e^{j2\pi fT}}$$

Unter dem Frequenzgang versteht man die Übertragungsfunktion, ausgewertet auf dem Einheitskreis der z-Ebene. Jeder Punkt auf der Frequenzachse zwischen 0 und fs entspricht einem Punkt auf dem Einheitskreis der z-Ebene.

$$|H(f)|$$

ist der Amplitudengang und

$$\angle H(f)$$

ist der Phasengang.

$$\tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\angle H(f)}{df}$$

ist die Gruppenlaufzeit. Die Gruppenlaufzeit ist die Zeit, die ein Signal im System verbringt.

H(z) $\bullet - \circ$ h[n]

Wird die Übertragungsfunktion in den Zeitbereich transformiert, dann erhält man die Impulsantwort.
Das Ausgangssignal entsteht durch die Verknüpfung des Eingangssignals mit der Übertragungsfunktion:

Y(z)=H(z)X(z)

Wird diese Gleichung in den Zeitbereich transformiert, so ergibt das die Faltung:

y[n]=h[n]*x[n]

Wird für H(z) die zu Anfang dieses Kapitels gesehene Funktion zu H(z) eingesetzt und anschließend in den Zeitbereich rücktransformiert, so erhält man die Differenzengleichung:

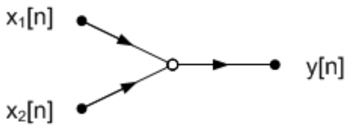
$$y[n] = -\sum_{i=1}^{M} a_i y[n-i] + \sum_{i=0}^{N} b_i x[n-i]$$

Aus der Differenzengleichung kann man das Signalflussdiagramm herleiten.

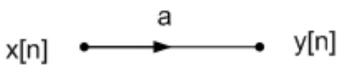
2.5 Signalflussdiagramm

Signalflussdiagramme werden aus 3 verschiendenen Elementen zusammengesetzt: Addierern, Multiplizierern mit Konstanten und Verzögerungselementen. Ein Signalflussdiagramm ist eine vereinfachte Form eines Blockdiagramms. Additionspunkte werden mit einem Kreis dargestellt, Eingangs-, Ausgangs- und Abzweigknoten werden durch schwarz ausgemalte Kreise dargestellt. Der Multiplizierer wird durch einen Pfeil dargestellt mit der zusätzlichen Angabe des Wertes der Konstanten. Ein Pfeil, der den Wert z^{-}1 bei sich trägt, stellt ein Verzögerungselement dar. Pfeile ohne Wertigkeiten sind gewöhnliche Signalpfade.

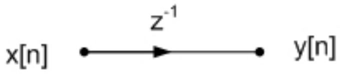
Addierer: $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$



Multiplizierer: $y[n] = a * x[n]$



Verzögerungselement: $y[n] = x[n-1]$



3 Eigenschaften und Strukturen digitaler Filter

3.1 Allgemeines

Lineare Digitalfilter werden in FIR- und IIR-Filter eingeteilt. Beide Filterklassen haben interessante Eigenschaften, die im Folgenden dargestellt werden. Ebenfalls werden einige Signalflussdiagramme zu deren Realisierungen vorgestellt. Das Signalflussdiagramm nennt man die Struktur eines Filters. Kennt man die Struktur eines Filters, so kann man diesen in einem Programm auf einem Rechner implementieren.

3.2 IIR-Filter

3.2.1 Grundlagen

Unter einem FIR-Filter N-ter Ordnung versteht man einen Digitalfilter mit folgender Übertragungsfunktion:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_N z^{-N}$$

Dies ist die eben gesehene Übertragungsfunktion für LTI-Systeme, wobei für alle a$_i$ 0 eingesetzt wurde. Durch Rücktransformation in den Zeitbereich erhält man dann folgende Impulsantwort:

$$h(n) = b_0\delta[n] + b_1\delta[n-1] + ... + b_N\delta[n-N]$$

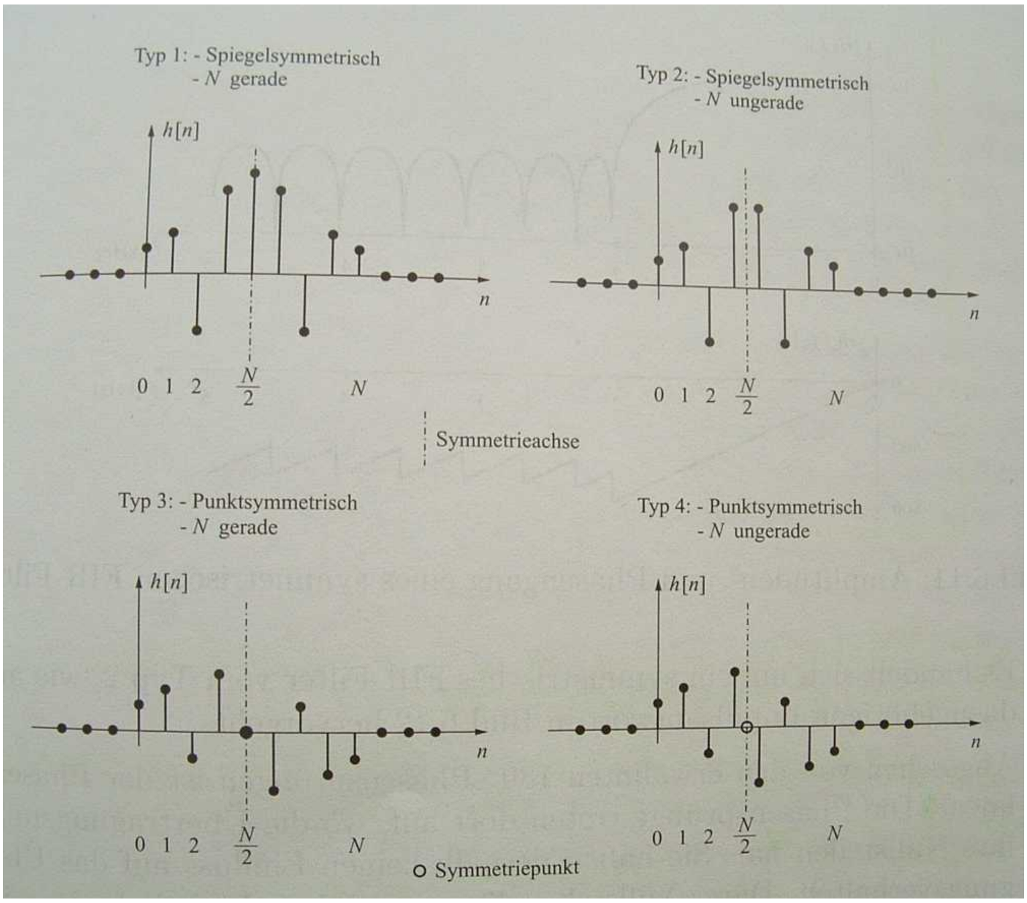
In Sequenzschreibweise:

$$\{h(z)\} = \{b_0, b_1, ..., b_N\}$$

Aus der Sequenzschreibweise lässt sich leicht erkennen, dass die Dauer der Impulsantwort endlich ist mit der Länge N+1. Dies führt zu der Bezeichnung FIR-Filter (Finite Impulse Response Filter).

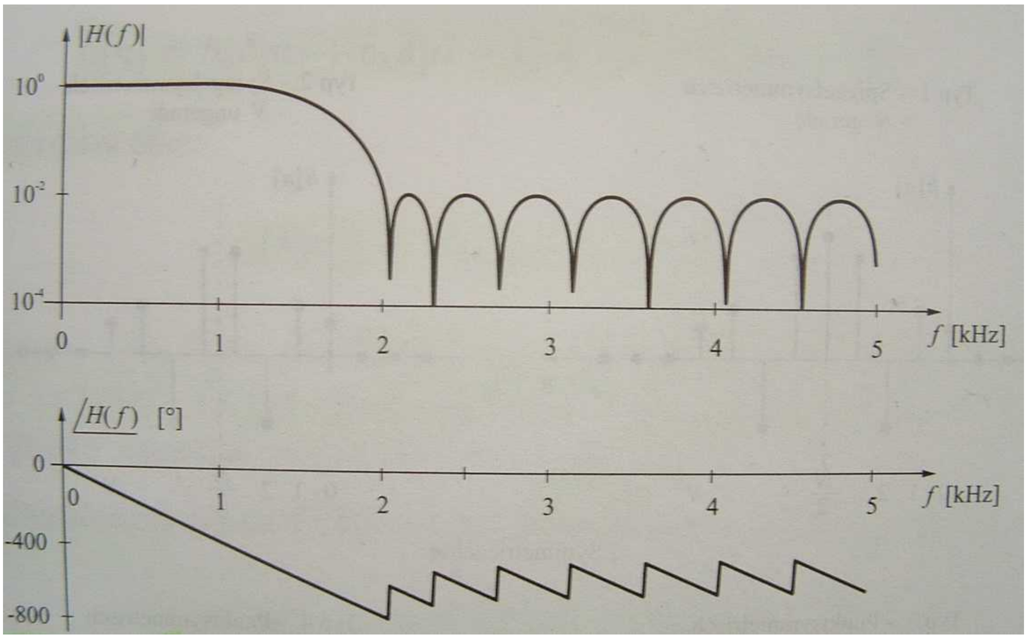
3.2.2 Eigenschaften symmetrischer FIR-Filter

In der Praxis verwendet man hauptsächlich symmetrische FIR-Filter. Ein symmetrischer FIR-Filter hat entweder eine spiegel- oder achsensymmetrische Impulsantwort.

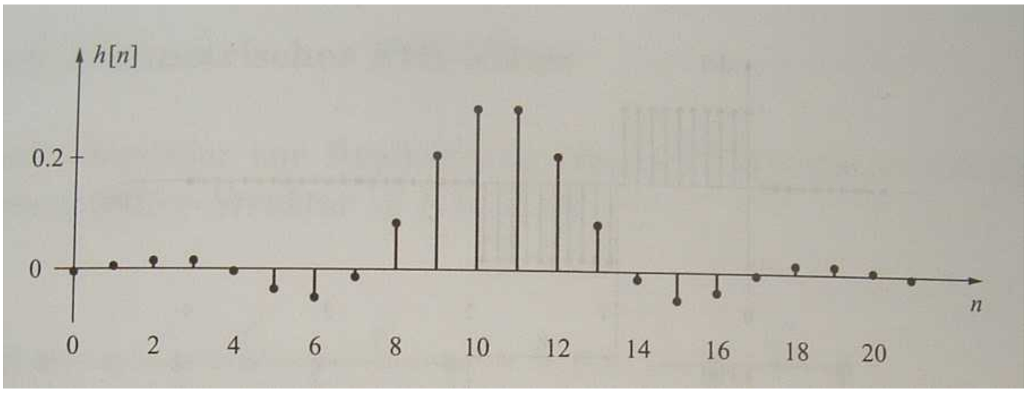


- Der Phasengang eines symmetrischen FIR-Filters ist, bis auf die 180° Phasensprünge, eine lineare Funktion von f
- Die Gruppenlaufzeit von symmetrischen FIR-Filtern ist konstant und ihr Wert ist gleich N/2 * T

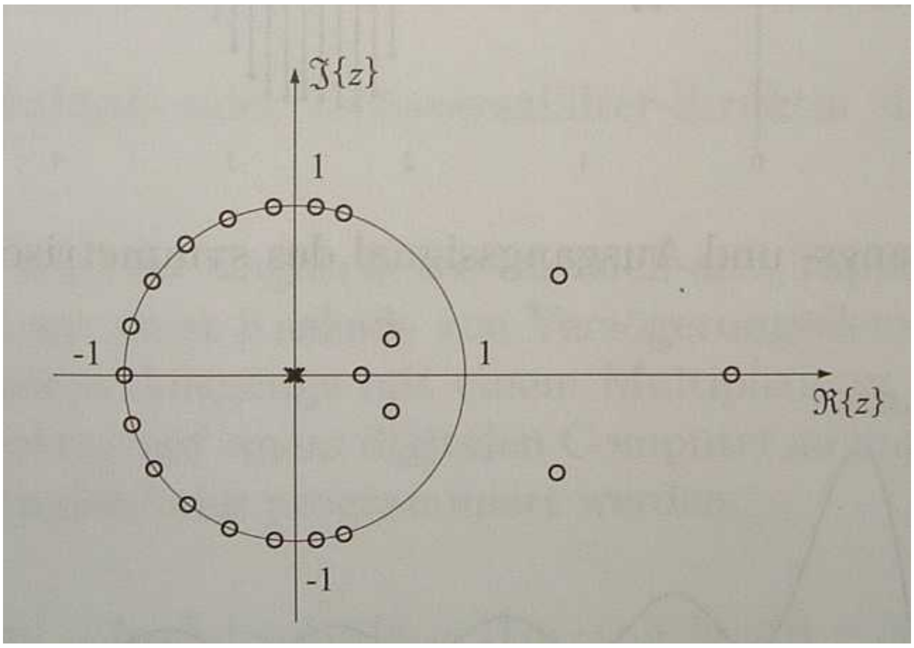
Hat man eine konstante Gruppenlaufzeit, so folgt daraus folgende Eigenschaft: Signale im Durchlassbereich werden nicht verzerrt, sondern nur verzögert. Ebenfalls bleibt die Symmetrie von symmetrischen Pulsen erhalten. Dies wird im nächsten Beispiel deutlich. Gegeben sei folgende Ausgangssituation:



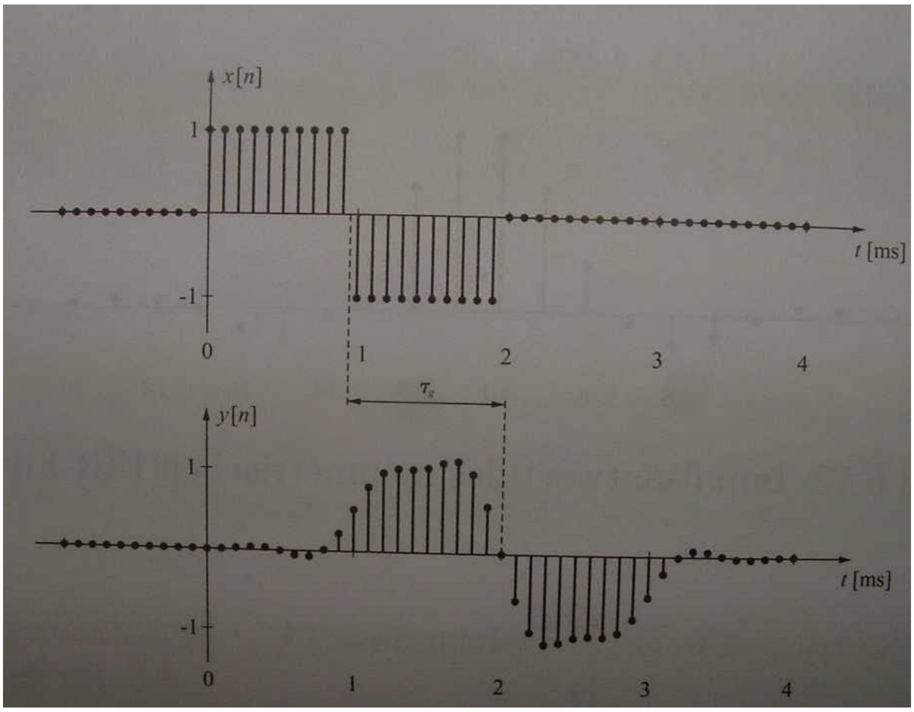
Oben ist der Amplitudengang zu sehen und unten der Phasengang. Es handelt sich dabei um einen FIR-Filter vom Typ2 (zur Erinnerung: N ungerade, spiegelsymmetrisch).



Hier sieht man die Impulsantwort des symmetrischen FIR-Filters. Die Länge des Filters lässt sich aus der Impulsantwort ablesen (hier 22). Daraus ergibt sich, dass die Übertragungsfunktion 21 Nullstellen hat sowie 21 Pole, die alle im Ursprung liegen:



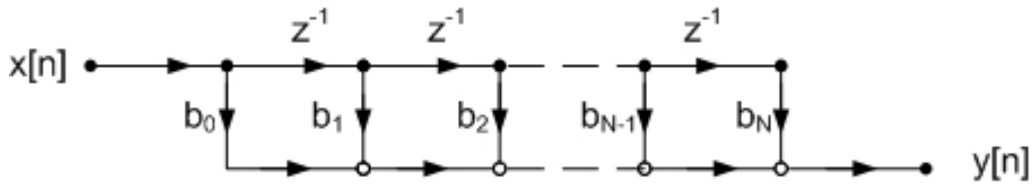
Zur Untersuchung der Wirkung des Filters wird an den Eingang ein punktsymmetrischer Rechteckimpuls gelegt.



Wenn man sich das Ausgangssignal betrachtet, dann sind 2 Dinge auffällig: Zum einen ist das Rechtecksignal wie erwartet an den Ecken abgerundet, allerdings ist es immer noch punktsymmetrisch. Zum anderen ist der Schwerpunkt des gefilterten Rechteckpulses gegenüber dem Schwerpunkt des Eingangssignals um die Gruppenlaufzeit (hier: 1.05 ms) verzögert.

3.2.3 Strukturen symmetrischer FIR-Filter

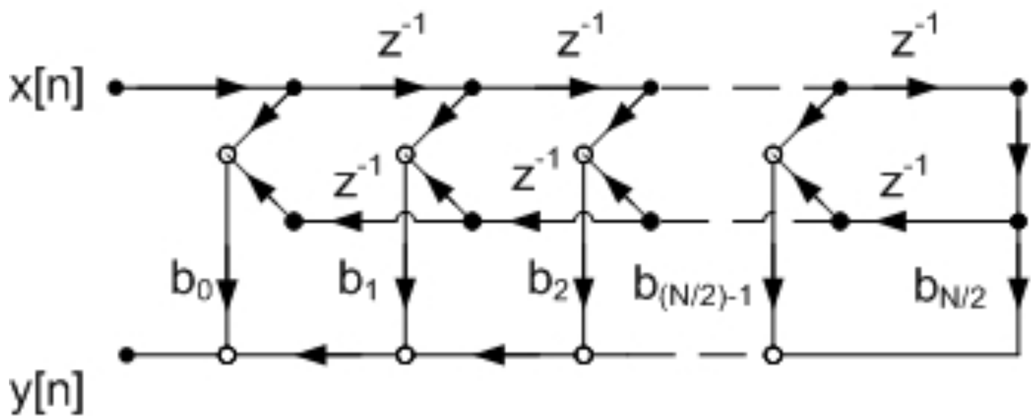
Die klassische Struktur ist sog. Direktform- oder Transversalfilter-Struktur:



z^{-1} sind jeweils Verzögerungselemente, b_0 bis b_N sind Konstanten (Multiplizierer), nicht ausgemalte Kreise sind Addierer. Aus dem Signalflussdiagramm lässt sich nun folgende Differenzengleichung aufstellen:

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + ... + b_N x[n-N]$$

Diese Gleichung kann nun auf einem Rechner implementiert werden. Daraus lässt sich erkennen, dass pro Ausgangsabtastwert (N+1) Multiplikationen und N Additionen durchgeführt werden müssen. Zur Verbesserung kann man die Symmetrie des FIR-Filters ausnützen. Im Folgenden Beispiel wird das Signalflussdiagramm eines FIR-Filter vom Typ 1 (spiegelsymmetrisch und N gerade) betrachtet.



Daraus lässt sich folgende Differenzengleichung aufstellen:

$$y[n] = b_0(x[n] + x[n-N]) + b_1(x[n-1] + x[n-(N+1)]) + ... + b_{\frac{N}{2}} x[n - \frac{N}{2}]$$

Es sind zwar noch N Verzögerungsglieder und N+1 Additionen notwendig, allerdings nur noch $\frac{N}{2}$ Multiplikationen.

3.3 IIR-Filter

3.3.1 Allgemeines

Unter einem IIR-Filter (infinite impulse response filter) N-ter Ordnung versteht man einen Digitalfilter mit folgender Übertragungsfunktion:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + ... + a_N z^{-N}}$$

Aus den Grundlagen haben wir eben gesehen, dass der Grad im Nenner und im Zähler bei der Übertragungsfunktion von LTI-Systemen ungleich sein kann. In der Praxis ist es allerdings üblich, dass Grad des Zählers und des Nenners gleich groß sind. Sollte dies allerdings einmal nicht der Fall sein, so kann man die hochgradigen a_i bzw. b_i Koeffizienten gleich 0 setzten.
Wie der Name des IIR-Filters bereits sagt, ist die Impulsantwort im Allgemeinen unendlich lang. Sie kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$h[n] = \sum_{i=0}^{\infty} h[i]\delta[n-i]$$

In dazugehöriger Sequenzschreibweise:

$$\{h[n]\} = \{h[0], h[1], h[2], ...\}$$

Werden alle Pole von H(z) durch Nullstellen kompensiert, dann hat die Impulsantwort eine endliche Länge. Somit wäre das Digitalfilter ein FIR-Filter, allerdings hat sich der Name IIR-Filter für diese Form von Filtern eingebürgert.

3.3.2 Eigenschaften von IIR-Filtern

Stabilität:
IIR-Filter sind immer rekursiv und können demnach instabil sein. Die Stabilität eines Filters lässt sich anhand der Pole der Übertragungsfunktion

bestimmen. Liegen alle Pole innerhalb des Einheitskreises der z-Ebene, so ist das Digitalfilter stabil.
Phasengang und Gruppenlaufzeit:
Der Phasengang eines IIR-Filters ist nichtlinear und die Gruppenlaufzeit ist nicht konstant.

3.3.3 Strukturen von IIR-Filtern

Differenzengleichung eines IIR-Filters:

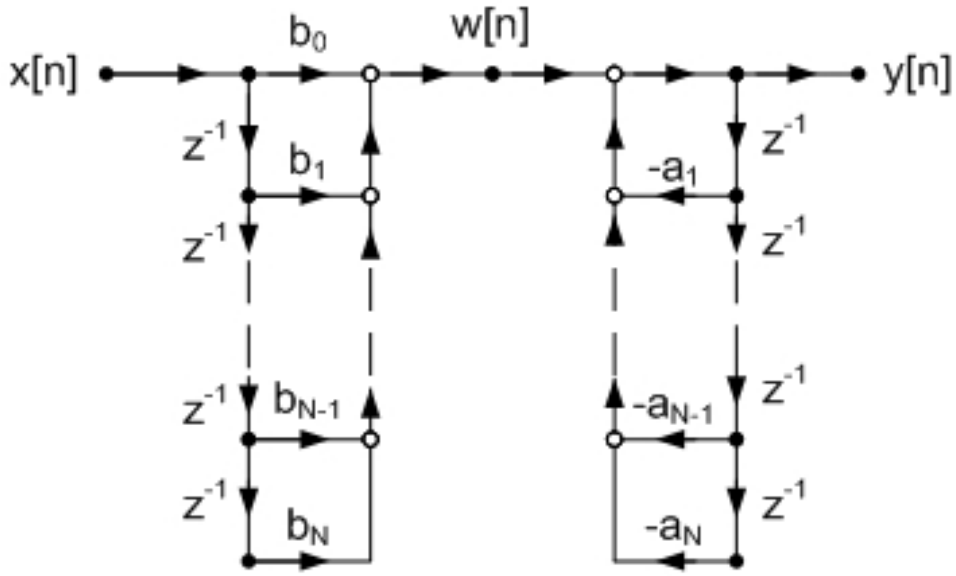
$$y[n] = -\sum_{i=1}^{N} a_i y[n-i] + \sum_{i=0}^{N} b_i x[n-i]$$

Diese Formel lässt sich als Paar zweier Differenzengleichungen schreiben:

$$w[n] = \sum_{i=0}^{N} b_i y[n-i]$$

$$y[n] = w[n] - \sum_{i=1}^{N} a_i y[n-i]$$

w[n] beschreibt dabei einen FIR-Filter, der am Eingang x[n] und am Ausgang w[n] hat. Die zweite Gleichung gehört zu einem Allpol-Filter. Ein Allpolfilter ist ein IIR-Filter, dessen Zählerpolynom 0-ten Grades ist und das demzufolge nur Pole hat. Am Eingang dieses Allpol-Filters ist dann w[n] und am Ausgang y[n].
Die dazugehörige Struktur nennt man Direktform-I-Struktur:

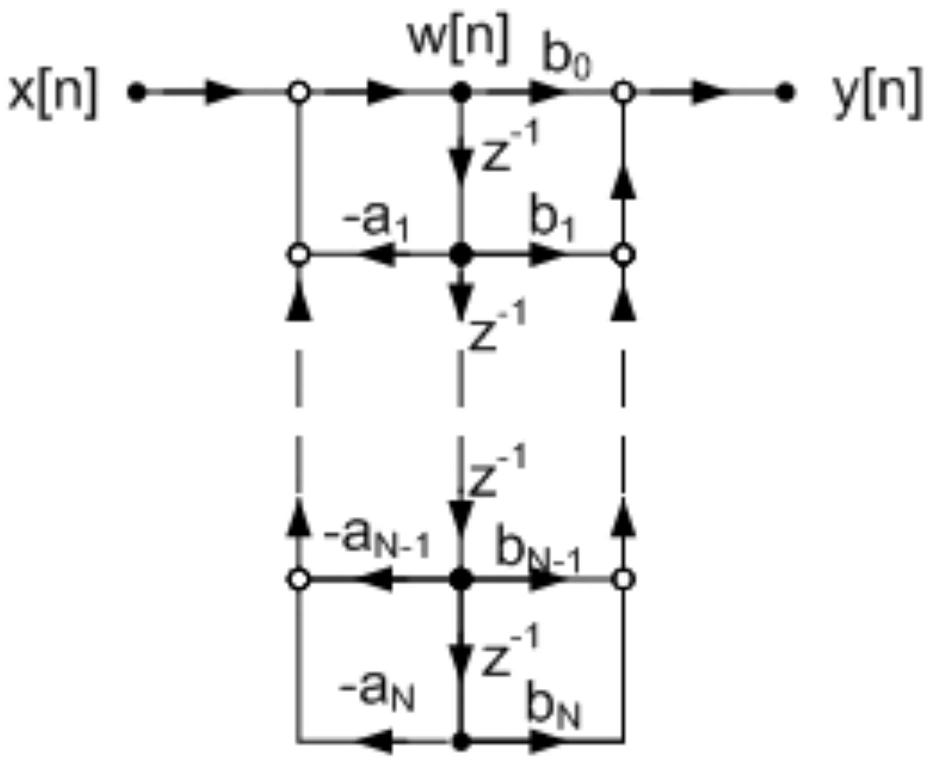


Vertauscht man die Reihenfolge der beiden Systeme, so erhält man die Direktform-II-Struktur. Die Differenzengleichungen lauten:

$$w[n] = x[n] - \sum_{i=1}^{N} a_i w[n-i]$$

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N} b_i w[n-i]$$

Daraus folgt folgende Struktur:


w[n]
x[n]
b_0
y[n]
z^{-1}
$-a_1$
b_1
z^{-1}
z^{-1}
$-a_{N-1}$
b_{N-1}
z^{-1}
$-a_N$
b_N

4 Quellenverzeichnis

Literatur

[1] Digitale Signalverarbeitung
Daniel Ch. von Grünigen
Fachbuchverlag Leipzig

[2] http://homepages.fh-regensburg.de/˜uh39305/pek/pek10.pdf

[3] Wikepedia