Seminar
Digitale Signalverarbeitung
Fourier Transformation

Michael Fogel
mikfogel@uni-koblenz.de

16.5.2005

Abbildung 1: Jean Baptiste Joseph Fourier

1 Das Leben von Jean Baptiste Joseph Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier, Sohn eines Schneiders, wurde am 21 März 1768 in Auxerrre, Frankreich geboren. Als er 9 Jahre alt war starb seine Mutter. Nur ein Jahr später starb sein Vater. Seine Schullaufbahn begann er in der Pallais's Schule und erlernte dort Französisch und Latein. 1780 wechselte er auf das Ecole Royale Militaire von Auxerre. Schon früh erkannte er seine Liebe zur Mathematik und zeigte hervoragende Leistungen in diesem Gebiet. 1787 trat er in das Mönchskloster von St Benoit-sur-Loire ein um Priester zu werden. Jedoch verliess er schon 2 Jahre später das Kloster und wurde Lehrer an der Ecole Royale Militaire. Er war sich unklar ob er sein Leben der Mathematik oder Kirche widmen sollte. Ab ca. 1793 wurde er politisch aktiv und während der französischen Revolution eingesperrt. Erst nach beendigung der unruhen wurde er wieder freigesetzt.

1794 begann er ein Studium der Mathematik an der Ecole Normal in Paris. Dort besuchte er unter anderem Vorlesungen von Lagrange, Laplace und Monge die einen sehr großen Einfluss auf sein Leben hatten. 1797 wurde er dann Nachfolger von Lagrange und wurde Professor für Analysis und Mechanik. 1798 wurde er einer von Napoleons wissenschaftlichen Berater in der egyptischen Invasion. Dort gründete er zusammen mit weiteren Wissenschaftlern ein wissenschaftliches Institut das Kairo Intstitut und unternahm viele archäologische Forschungen. Er wurde von Napoleon zum Sekretär des Instituts ernannt und war für die wissenschaftlichen Arbeiten verantwortlich.

1801 kehrte er dann nach Frankreich zurück und lehrte weiter am École Polytechnique. Napoleaon hatte weitere Pläne mit ihm und machte ihn daher 1802 zum Präfekt des Department der Isere in Grenoble. Dort begann Fourier seine Forschungsarbeit und erziehlte in Bereich der Warmeleitung seine größten mathematischen Erfolge. Die Arbeit "Über die Ausbreitung von Wärme in festen Körpern" veröffentlichte er dann 1807. Heute ist diese Arbeit bestätigt doch wurde sie damals sehr kontrovers angenommen. Teil dieser Arbeit sind die heute sehr bekannten Fourier Reihen.

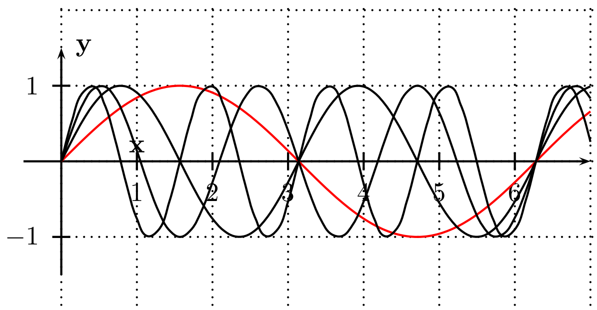
1817 kehrte er dann nach Paris zurück und wurde in die Akkademie der Wissenschaften gewählt. Als Delmbre 1822 Starb wurde Fourier Sekretär der mathematischen Abteilung. In der folgenden Zeit veröffentlichte er mehrere mathematische Arbeiten. Fourier Starb am 16 Mai 1830 in Paris.

2 Fourier-Reihe und Fourier Transformation

In der 1807 von Fourier veröffentlichten Arbeit "Über die Ausbreitung von Wärme in festen Körpern" benutzte er Linearkombinationen aus Sinus und Consinus Schwingungen um reelwertige, T_0-periodische Funktionen $x_p(t)$ zu approximieren. Ähnlich wie die Taylor Reihe nähert sich die Fourier Reihe mit jedem Schritt der Funktion immer weiter an. Nach unendlich vielen Schritten ist diese deckungsgleich mit der Originalfunktion.

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2\pi k f_0 t) + b_k \sin(2\pi k f_0 t)] \tag{1}$$

Nach einer ersten Betrachtung fragt man sich warum Fourier gerade auf diese Gleichung gekommen ist. Doch nach genauerer Betrachtung erkennt man dass dies die einfachste Form der Gleichung darstellt. Cosinus und Sinus sind Winkelfunktionen. haben also einen definitionsbereich von 0°- 360° und wiederholen sich danach wieder. Es handelt sich dabei also auch um T_0 periodische Funktionen mit $T_0 = 360°$. 360° entsprechen im Bogenmass 2π dem Vollkreis. Der Ausdruck in den Funktionen normiert also einfach die beiden Perioden damit diese an gleicher Stelle auf der X -Achse liegen. Der innere Ausdruck $2\pi f_0$ kann durch die Formel $f_0 = \frac{1}{T_0}$ in $\frac{2\pi}{T_0}$ umgewandelt werden. Der Definitionsbereich von Sinus und Cosinus wird durch den Definitionsbereich der Funktion geteilt und somit auf den Definitionbereich der Funktion normiert.



Diese Gleichung wird oft auch als synthese Gleichung bezeichnet. Die Fourier Koeffizienten a_k und b_k definieren dabei die Amplitude der k-ten Oberschwingung. Alle Oberschwingungen haben die Periode T_0/k und schliessen daher ihre Periode bei T_0 ab. Oft nennt man dies auch eine Grundfrequenz und ihre Harmonischen. Ein Vorteil der Harmonischen ist die Orthogonalität. Diese wird später zur Bestimmung der Koeffizienten genutzt.

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(2k\pi f_0 t) dt \\
b_k &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(2k\pi f_0 t) dt
\end{aligned}
$$

Kernaussage der Fourierreihe ist:

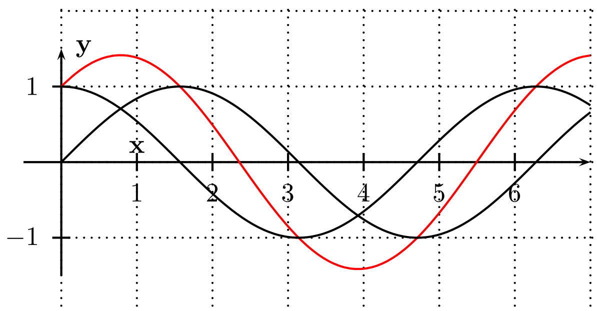
> "Ein periodisches Signal setzt sich zusammen aus einem DC-Anteil, einer Grundfrequenz und aus Oberschwingungen."

Unter DC-Anteil versteht man einen konstanten Wert, der zu den Schwingungen hinzuaddiert wird. Dieser wird durch den Faktor A_0 representiert. Die Synthesegleichung wird aber oft auch mit diesem Ausdruck beschrieben:

$$x_p(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \alpha_k) \tag{2}$$

Mit $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ und $\alpha_k = -arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$

Unter verwendung von $\sin(x) = \cos(2\pi - x)$ lassen sich alle Sinusschwingungen durch Phasenverschiebung in Consinusschwingungen erzeugen. Will man beide in nur einer Schwingung vereinen, so muss man die benötigte Phasenverschiebung durch die Amplituden bestimmen. $\alpha_k = -arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$ leistet dies. Um es zu verdeutlichen kurz die beiden Extremfälle. 1. $a_k = 0 \qquad b_k! = 0$ unter Auslassung einer Grenzwertbetrachtung ergibt die Formel -2π und damit wieder die um 2π verschobene Sinusschwingung. 2. $a_k! = 0 \qquad b_k = 0$ hier kommt es zu keiner Phasenverschiebung, also bleibt die Consinusschwingung erhalten. Wegen der Phasenverschiebung von $90°$ reicht zur bestimmung der neuen Amplitude der Einsatz des Satz des Pythagoras aus.



Ersetzt man $\cos(x)$ durch den komplexen Ausdruck $\frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$ und $\sin(x)$ durch den Ausdruck $\frac{1}{2}(e^{jx} - e^{-jx})$, erhält man nach Vereinfachung die Formel:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk2\pi k f_0 t} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[c_k e^{jk2\pi k f_0 t} + \bar{c}_k e^{-jk2\pi k f_0 t}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[c_k(\cos(2\pi k f_0 t) + j\sin(2\pi k f_0 t)) + \bar{c}_k(\cos(2\pi k f_0 t) - j\sin(2\pi k f_0 t))\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\underbrace{(c_k + \bar{c}_k)}_{a_k}(\cos(2\pi k f_0 t)) + \underbrace{j(c_k - \bar{c}_k)}_{b_k}(\sin(2\pi k f_0 t))\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k(\cos(2\pi k f_0 t)) + b_k(\sin(2\pi k f_0 t))\right]
\end{aligned}
$$

Mit

$$\begin{aligned}
b_k &= j(c_k - \bar{c}_k) = 2|ic_k| = -2\Im c_k \\
a_k &= 2\Re(c_k) \\
\alpha_k &= \angle c_k = -arctan\Big(\frac{b_k}{a_k}\Big) = -arctan\Big(\frac{\Im c_k}{\Re c_k}\Big) \\
A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2|c_k|
\end{aligned}$$

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk2\pi k f_0 t} \tag{3}$$

Diese Form der Fourier Reihe wird meist von den Elektrotechnikern bevorzugt. Einziger Vorteil ist die Kürze. Die Formel ist jedoch äquivalent zur reelen Formel. Die neuen Parameter sind so definiert.

$$A_0 = c_0 \qquad A_k = 2 \mid c_k \mid \qquad und \qquad a_k = \angle c_k \tag{4}$$

c_k wird dabei als komplexer Fourier Koeffizient bezeichnet. Diesen gilt es im Zuge einer Analyse zu bestimmen. Damit dies gelingt muss die Formel umgeformt werden. Dazu müssen nun beide Seiten mit $e^{-jn2\pi f_0 t}$ multipliziert werden.

$$x_p(t)e^{-jn2\pi f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk2\pi f_0 t} e^{-jn2\pi f_0 t} \tag{5}$$

Nun müssen beide Seiten in den Grenzen $-T0/2$ bis $T_0/2$ integriert werden.

$$\begin{aligned}
\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t)e^{-jn2\pi f_0 t}dt &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk2\pi f_0 t} e^{-jn2\pi f_0 t} dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{jk2\pi f_0 t} e^{-jn2\pi f_0 t} dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j(k-n)2\pi f_0 t} dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-T_0/2}^{T_0/2} 1 dt \\
&= c_k T_0
\end{aligned}$$

Durch die weiter oben erwähnte Orthogonalität harmonischer Funktionen, sind alle integrale mit k=!n null. So müssen nur noch die Integrale für den Fall k=n betrachtet werden. Diese sind jedoch gleich T_0. Daher ergibt sich zur bestimmung der Koeffizienten folgende Gleichung.

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t)e^{-jk2\pi f_0 t}dt \tag{6}$$

3 Fourier Transformation

Leider ist die Fourier Reihe auf periodische Funktionen beschränkt. Will man auch nicht periodische Funktionen transformieren, so muss man eine neue Umsetzung definieren. Wurde bei der Analyse der Fourier Reihe der Wert c_k also die Amplitude der k-1 ten Oberschwingung zur Grundfrequenz f_0 gesucht, so gibt die Fourier Transformation die Amplitude einer Frequenz zurück. Die Fourier Transformation lässt sich aus der Synthese und Analyse -Gleichung herleiten. Dazu muss die Synthesegleichung mittels der Analysegleichung modifiziert werden. Eine eher banale Änderung ist das entfernen des Index p der Funktion. Statt c_k wird die Analysegleichung $\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t)e^{-jk2\pi f_0 t}dt$ eingesetzt.

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk2\pi f_0 t}dt\right]e^{jk2\pi f_0 t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk2\pi f_0 t}dt\right]e^{jk2\pi f_0 t}\frac{1}{T_0} \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist noch etwas unhandlich und muss daher noch weiter vereifacht werden. Ein kleiner Trick hilft dabei. Eine nicht periodische Funktion ist eine Funktion mit unendlicher Periode, die nur einmal durchlaufen wird. Die Grundfrequenz ist damit unendlich klein $f_0 = \frac{1}{T_0} < \epsilon$ mit $\epsilon \longrightarrow 0$. Diese Beziehung ist aus der Integralrechnung bekannt. Aus diesem Grund wurde $f_0 = df$ gesetzt und von $-\infty$ bis ∞ integriert. kf_0 entspricht dabei einem Punkt auf der x Achse und wird mit f ersetzt.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt\right]e^{j2\pi f t}df \tag{7}$$

Die Gleichung ist in dieser Form eine Abbildung auf sich selbst. Die Funktion wird Transformiert und dann wieder rücktransformiert. Der Ausdruck in den Klammern entspricht dabei der Analyse und die Umgebende der Synthese. Das Ergebnis der Analyse nennt man die Fourier Transformierte $X(f)$. Mit ihr lässt sich der Frequenzanteil einer gegebenen Frequenz f errechnen.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt \tag{8}$$

Ersetzt man den Ausdruck in der Klammer durch das $X(f)$ der Fourier Transformierten so sieht die Gleichung etwas handlicher aus. Bei dieser Gleichung spricht man auch oft von der invers Fourier Transfotmierten.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f t}df \tag{9}$$

Beide Gleichungen $x(t)$ und $X(f)$ bilden ein Paar, das Fourier Transformationspaar. $X(f)$ ist die Fourier Transformierte von $x(t)$ und $x(t)$ ist die Invers Fourier Transformierte von $X(f)$. Diese Beziehung wird durch das folgende Symbol representiert: $\circ\!\!-\!\!\bullet$

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X[f] \tag{10}$$

Nun sind alle Gleichungen für die Fourier Transformation definiert. Doch leider sieht man durch die komplexe Form der Gleichungen nur sehr schwer wie es genau Funktioniert.

Jedes Signal lässt sich in seine geraden und ungeraden Teile zerlegen. Unter gerade versteht man ein Spiegelsymmetrisches Signal und unter ungerade ein punktsymmetrisches Signal. Diese Aussage stellt die Basis für die Fourier Transformation dar. Ein Beispiel für ein ungerades Signal ist Sinus und für ein gerades Signal Cosinus. Genauso wie man nun ein Signal in seine ungeraden und geraden Anteile zerlegen kann ist es nun möglich diese mit einem ungeraden und einem geraden Signal zu Approximieren. Bei Anwendung der komplexen Exponentialfunktion setzt sich ein Signal nun aus reellen Cosinusschwingungen und imaginären Sinusschwingungen zusammen. Dies wird jedoch durch die Eigenschaften noch klarer.

Für die Fourier Reihe benötigte man die Amplitude und die Phasenverschiebung. Diese Informationen befinden sich in $X(f)$. Komplexe Zahlen besitzen 2 Komponenten. Einen Realteil und einen Imaginärteil. Beide Bilden einen Ortsvektor auf einen Punkt in der Ebene. Wie jeder andere Vektor, hat auch dieser eine Norm. In der Polardarstellung beschreibt man die Vektoren daher mit ihrer Norm und dem Winkel zwischen ihnen und der Realachse. Diese Beiden Informationen fliessen nun auch in die Gleichung ein. Die Norm entspricht dabei der Aplitude und der Winkel der Phasenverschiebung. Anders als bei der Fourier Reihe ist die Basis dieser Informationen nicht eine Zahl k sondern die Frequenz der Schwingung. Daher spricht man bei $X(f)$ auch vom Spektrum der Funktion $x(t)$. Dies ist besonders für Filter interessant, um einige Frequenzen zu filtern. Equalizern ist es so z.b möglich durch veränderung der Amplitude die Frequenzbereiche zu verstärken oder zu schwächen. Die Anzeige im Autoradio funktioniert auch durch die Fourier Analyse.

$$X(f) = \Re\{X(f)\} + j\Im\{X(f)\} = \mid X(f) \mid e^{j\angle x(f)} \tag{11}$$

Die 4 Spektren eines Signals Durch die Fourier Analyse gewinnt man viele Informationen über ein Signal $x(t)$. Diese kann man in Diagrammen darstellen. Meist werden zu einem Signal 4 Spektren angegeben.

Betragsspektrum Das Betragsspektrum wird oft auch Frequenzspektrum eines Signals $x(t)$ genannt, da man anhand dieses Spektrums den frequenzmässigen Aufbau eines Signals sehen kann. Es zeigt zu einer Frequenz f deren Amplitude und somit den Anteil am Signal.

Realteilspektrum Das Realteilspektrum Zeigt die geraden Anteile eines Signales. Es zeigt somit die Werte von $a_k/2$

Imaginärteilspektrum Das Imaginärteilspektrum ist analog zum Realteilspektrum und Zeigt die ungeraden Anteile des Signals. Es zeigt somit die Werte von $b_k/2$

Phasenspektrum Das Phasenspektrum Zeigt die anteilmässige Phasenverscheibung zwischen den Cosinus und Sinusschwingungen, Aufgezeigt sind die Winkel $\varphi = \angle c_k$

4 Eigenschaften der Fourier Transformation

Im nun folgenden Abschnitt werden die Eigenschaften der Fourier Trandformation betrachtet. Dies wird an einigen Beispielen erläutert.

Linerarität Eine wichtige Eigenschaft der Fourier Transformation ist die Linearität. Im folgenden seien k_1 und k_2 zwei Konstanten und $x_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X_1(f)$ sowie $x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X_2(f)$ zwei Fourier Transformationspaare. Nun kann folgende Eigenschaft definiert werden.

$$k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet k_1 X_1(f) + k_2 X_2(f) \tag{12}$$

"Die Fourier-Transformierten einer Linearkombination von Signalen ist gleich der Linearkombination ihrer Fourier Transformierten" [vG02, Zitat Seite 35]

Dualität Die Dualität wird oft auch als Symmetrie bezeichnet. Dabei versteht man folgende Eigenschaft:

$$X(t) \circ\!\!-\!\!\bullet x(-f) \tag{13}$$

Dies ist bereits an den Gleichungen für die Synthese und Analyse zu sehen. Beide Gleichungen unterscheiden sich nur durch den exponenten der Exonentialfunktion, Gegenüber der Synthesegleichung ist dieser bei der Analysegleichung negativ. Dies Spiegelt sich auch bei -f wieder. Wird das f in der Analysegleichung durch ein t ersetzt und das t der Synthesegleichung durch ein -f, so bilden beide wieder ein Transformationspaar.

Diese Eigenschaft lässt sich dazu nutzen, bereits bekannte Transformationen für die Transformation einzusetzen. Wie schon bekannt ist die Transformation des Dirac-Stoss die DC Funktion. $X(t) = K\delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet x(f) = K1(f)$. Aus der Dualität lässt sich nun die Transformation des Dirac Stosse ableiten. $K1(t) = K\delta(-f) = K\delta(f)$. Der Letzte Schritt folgt daraus dass der Dirac Stoss gerade ist.

Zeit und Frequenzskalierung Wird die Zeit des Signals durch eine Konstante k Skaliert, so ändert sich sein Spektrums wie unten angegeben:.

$$x(kt) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\mid k \mid} X\left(\frac{f}{k}\right) \tag{14}$$

Die Konstante k wirkt bei k¿1 wie ein Zeitraffer und bei k¡1 wie eine Zeitlupe des Signals. Dieser Effekt ist bei einem Tonband zu erkennen das entweder langsamer oder schneller als gewöhnlich abgespielt wird. Jeder kennt diesen Effekt. Wird es schneller abgespielt so wirken die Geräusche höher und wenn man es langsamer abspielt sind diese tiefer.

Zeit und Frequenzverschiebung Wird die Zeitfunktion $x(t)$ um den Wert t_0 verschoben, so ergibt sich daraus folgendes Transformationspaar:

$$x(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet X(f) e^{-j2\pi f t_0} \tag{15}$$

Wird die Zeitfunktion verschoben so wirkt sich diese Verschiebung nicht auf das Frequenzspektrum aus. Jedoch erfolgt dadurch eine Verschiebung der Phase.

Diese Verschiebung lässt sich mit $\varphi = -2\pi f t_0$ berechnen. Für das Spektrum eines Signals ist es egal, zu welchem Zeitpunkt das Signal erzeugt werden soll. Die Phasenverschiebung ist für alle Frequenzen konstant und verschiebt somit alle Frequenzen um den gleichen Wert entlang der Zeitachse.

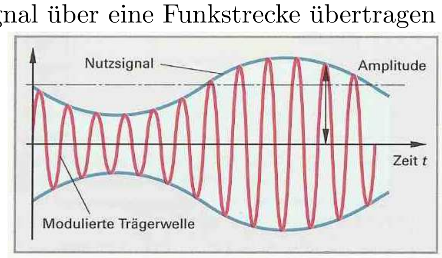
Wird die Frequenzfunktion jedoch um den Wert f_0 verschoben, so erhällt man folgendes Transformatonspaar:

$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet X(f - f_0) \tag{16}$$

Betrachtet man dazu die Gleichung etwas genauer:

$$\begin{aligned}
X(f-f_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(f-f_0)t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f}e^{-j2\pi(-f_0)t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f}e^{j2\pi f_0 t}dt \\
x(t)e^{j2\pi f_0 t} &\circ\!\!-\!\!\bullet \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f}e^{j2\pi f_0 t}dt
\end{aligned}$$

Hierbei wird das Signal mit der Komplexen Sinusschwingung $e^{j2\pi f_0 t}$ multipliziert und somit moduliert. Ein Anwendungsbeispiel ist die Amplitudenmodulation, die beim Rundfunkt eingesetzt wurde. Hierbei wird ein Trägersignal durch die Amplitude eines zweiten Signals moduliert. Auf diese Weise kann das Signal über eine Funkstrecke übertragen werden.



Symmetrieeigenschaften Betrachtet man das Spektrum eines reelen Signals so gilt:

$$x(t) \quad : \quad reell \circ\!\!-\!\!\bullet \begin{cases} \mid X(f) \mid & : \ \textbf{gerade}, \quad \angle X(f) \ : \ \textbf{ungerade} \\ \Re\{X(f)\} & : \ \textbf{gerade}, \quad \Im\{X(f)\} \ : \ \textbf{ungerade} \end{cases} \tag{17}$$

Somit sind Beragsspektrum und Realteil achsensymmetrisch, Phasenspektrum und Imaginärteil punktsymmetrisch.

$$x(t)\textbf{reell und gerade} \circ\!\!-\!\!\bullet X(f)\textbf{reell und gerade} \tag{18}$$

$$x(t)\textbf{reell und ungerade} \circ\!\!-\!\!\bullet X(f)\textbf{imaginär und ungerade} \tag{19}$$

Wie schon weiter oben erwähnt lässt sich jedes Sigal in seine geraden und ungeraden Anteile zerlegen. Somit gilt: $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$. Aus dem Theorem gilt nun, die geraden Anteile sind reel und die ungeraden Anteile imaginär.

$$\Re\{X(f)\} = X_e(f) \qquad \textbf{und} \qquad \Im\{X(f)\} = X_o(f) \tag{20}$$

Das Zerlegte Signal lässt sich wie folgt Fourier transformieren.

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j2\pi f t} dt, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi f t) dt + j\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi f t) dt \end{aligned}$$

Betrachtet man beide Ausdrücke so erkennt man schnell, das die Cosinusschwingung nur aus reelen Anteilen gebildet wird, da das rechte Integral immer null ist. Analog gilt das auch für die Sinusschwingungen. Ein solches Signal hat nur imaginäranteile da das linke Integral immer null ist. Daraus lässt sich ableiten, ein gerades Signal besteht nur aus Cosinusschwingungen und ein ungerades nur aus Sinusschwingungen. Da sich jedes Signal zerlegen lässt. kann auch jedes Signal aus diesen beiden Schwingungen Approximiert werden.

Fourier Transformierte eines periodischen Signals Aus der Fourier Reihe ist bekannt dass sich jedes perodische Signal aus der Summe von komplexen Cosinusschwingungen darstellen lässt. Die Fourier Transformierte der komplexen Cosinusschwingung ist ein Dirac stoss.

$$x_p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{jk2\pi f_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet X_p \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \delta(f - kf_o) \tag{21}$$

Daraus folgt: Die Fourier Transformierte eines periodischen Signals ist ein Linienspektrum. Aus der Dualität kann man folgern, dass die Fourier transformierte eines Linienspektrums periodisch ist. Dies ist eine weitere Eigenschaft der Fourier Transformation.

Periodizität und Diskredizität Nun kann man diese Eigenschaft auch universell formulieren. Ein Periodisches Signal hat ein diskretes, also ein Linienspektrum. Genauer kann man diese Linien aus der Formel für die Fourier Reihe herleiten. Diese Linien befinden sich dort wo $f = kf_0$ wobei $f_0 = \frac{1}{T_0}$, an jeder anderen Stelle ist $X(f) = 0$. Die Höhe der Linie entspricht dabei dem Koffizienten $|c_k|$.

$$x(t)\textbf{periodisch} \circ\!\!-\!\!\bullet X(f)\textbf{diskret} \tag{22}$$

Aus der Dualität folgt:

$$x(t)\textbf{diskret} \circ\!\!-\!\!\bullet X(f)\textbf{periodisch} \tag{23}$$

Parceval Theorem Die Energie eines Signals im Zeitbereich ist gleich der Energie im Frequenzbereich.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mid x(t) \mid^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mid X(f) \mid^2 df \tag{24}$$

Für T_0 periodische Signale gilt:

$$\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \mid x(t) \mid^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mid c_k \mid^2 \tag{25}$$

Die Leistung eines Signals ist gleich der Summe der Leisungen ihrer harmonischen Komponenten.

Unschärferelation Der Schwerpunkt oder auch Mittelpunkt eines Signales, wird anlog zum Erwartungswert der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie folgt definiert:

$$t_0 = \int_{-\infty}^{\infty} t|\acute{x}(t)|^2 dt, \qquad \textbf{wobei:} \qquad \acute{x}(t) = \frac{x(t)}{||x||} \tag{26}$$

$\acute{x}(t)$ Ist das normierte Signal $x(t)$. Dies wird erreicht wenn man es durch seine Leistung teilt. Das resultierende Signal hat somit die Leistung $W = 1$. Analog dazu wird der Schwerpunkt des Spektrums definiert.

$$f_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f|\acute{X}(f)|^2 dt, \qquad \textbf{wobei:} \qquad \acute{X}(t) = \frac{X(f)}{||X||} \tag{27}$$

Auch hier wird das Signal Normiert. Die Dauer $\triangle t$ und Bandbreite $\triangle f$ kann wieder analog zur Wahrscheinlichkeitsrehnung definiert werden.

$$\triangle t = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 \mid \acute{x}(t) \mid^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{28}$$

$$\triangle f = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (f - f_0)^2 \mid \acute{X}(f) \mid^2 df\right)^{\frac{1}{2}} \tag{29}$$

Wie die Heisenbergsche Unscharferelation in der Quantenphysik definierten wir auch hier eine Grenze:

$$\triangle t \triangle f \geq \frac{1}{4\pi} \tag{30}$$

Normalsprachlich:
Energiesignale langer Dauer sind schmalbandig und Energiesignale kurzer Dauer sind breitbandig.[vG02]

Laplace Transformation [vG02] Die Laplace-Transformation eines kausalen Signals $x(t)$ ist wie folgt definiert:

$$X(f) = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \tag{31}$$

Die Fourier-Transformierte $X(f)$ ist identisch mit der Laplace-Transformierten $X(s)$, falls:

1. Das Signal $x(t)$ kausal ist und endliche Energie hat.
2. Die Laplace-Variable s (komplexe Frequenz) durch $j2\pi f$ ersetzt wird.

Literatur

[vG02] Grünigen, Daniel Ch. von: *Digitale Signalverarbeitung.* 2002.