Ω-Automaten

Skript zur Vorlesung
"Ω-Automaten", SS 2004, und
"Automaten über unendlichen Wörtern", SS 2007.

Lutz Priese
Fachbereich Informatik
Universität Koblenz-Landau, Campus Koblenz
priese@uni-koblenz.de

Contents

1 Infinitäre Sprachen **3**

1.1 Grundbegriffe . . . 3
1.2 Sprachabschlüsse . . . 6
1.3 Ramsey-Zerlegungen . . . 10

2 Reguläre und rationale infinitäre Sprachen **12**

2.1 ω-reguläre Sprachen . . . 12
2.2 Büchi- und Muller-Automaten . . . 13
2.3 Der Hauptsatz von Büchi-McNaughton . . . 22

3 Algebraische Theorie von ω-regulären Sprachen **27**

3.1 Kongruenzen auf finitären Sprachen . . . 27
3.2 Kongruenzen auf infinitären Sprachen . . . 30
3.3 Komplement-Automat eines Büchi-Automaten . . . 37

4 Logische Theorie von ω-regulären Sprachen **39**

4.1 Syntax der S1S . . . 39
4.2 Semantik der S1S . . . 40
4.3 Definierbarkeit in der S1S . . . 41
4.4 Entscheidbarkeit der S1S . . . 47

5 Weitere Akzeptanzkonzepte **48**

5.1 Verbands der Rat-Klassen . . . 48
5.2 Verband der Rat^d-Klassen . . . 53
5.3 Gesamtverband der Rat- und Rat^d-Klassen . . . 56

6 Topologische Eigenschaften von Σ^∞ und Σ^ω **59**

6.1 Topologie und Metrik . . . 59
6.2 Topologische Eigenschaften von Σ^∞ . . . 62
6.3 Topologische Eigenschaften von Σ^ω . . . 63
6.4 Reg^ω in der Borel-Hierarchie . . . 66

1 Infinitäre Sprachen

1.1 Grundbegriffe

Wir benutzen folgende Notation. Die Zahl "unendlich" wird mit ω bezeichnet. Für sie gelten die Rechenregeln

$$\forall n \in \mathbb{N} : (n < \omega \text{ und } n + \omega = \omega + n = \omega).$$

A^B bezeichnet die Menge aller Abbildungen von einer Menge B in eine Menge A. Für eine Menge A ist $|A|$ die *Mächtigkeit* von A, d.h. die Anzahl der in A vorkommenden Elemente. $\mathbb{N}$ ist die Menge aller natürlicher Zahlen einschließlich der 0, $\mathbb{N}_+$ ist $\mathbb{N}$ ohne 0. Ein *infinitäres Wort* w über einem Alphabet Σ ist eine Abbildung aus $\Sigma^{\mathbb{N}_+}$. Ein *finitäres Wort* x über Σ ist eine endliche, eventuell leere Folge von Buchstaben aus Σ. Das leere Wort wird mit ε bezeichnet. Ein endliches Wort ist damit eine Abbildung aus Σ^A für $A = \{1, ..., l\}$ oder $A = \emptyset$. Σ^ω bezeichnet die Menge aller unendlichen Wörter über Σ und Σ^* die aller endlichen Wörter über Σ, ferner ist

$$\Sigma^\infty := \Sigma^* \cup \Sigma^\omega.$$

Für $x \in \Sigma^\infty$ bezeichnet $|x|$ die *Länge* (die Anzahl der Buchstaben) von x aus $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$. $x(n)$ ist der n-te Buchstabe von x für $n \leq |x|$ und undefiniert ($x(n) = \perp$) für $n > |x|$. $\#_a(x)$ ist die Anzahl der Vorkommen eines Buchstaben a in einem finitären oder infinitären Wort x, formal

$$\#_a(x) := |\{i \in \mathbb{N} | x(i) = a\}|.$$

$x[0] := \varepsilon$ und für $0 < n \leq |x|$ ist $x[n] := x(1)...x(n)$ das *Präfix* der Länge n von x. Ferner sei $x[n] := x$ für $n > |x|$.
$Prae(x) := \{x[n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge aller Präfixe von x. $Prae(x)$ wird auch mit $\downarrow(x)$ und $FG(x)$ bezeichnet, wobei FG für Linksfaktor steht.
Für $x, y \in \Sigma^\infty$ definiert

$$x \leq y :\Longleftrightarrow x \in Prae(y)$$

eine Ordnungsrelation. $x < y :\Leftrightarrow x \leq y$ und $y \neq x$.

Eine *Sprache* über Σ ist in dieser Vorlesung eine Teilmenge von Σ^∞, eine *finitäre Sprache* über Σ ist eine Teilmenge von Σ^* und eine *infinitäre Sprache* über Σ ist eine Teilmenge von Σ^ω.

Lemma 1.1 *Sei $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}_+}$ eine Folge von endlichen Wörtern $x_i \in \Sigma^*$ mit $x_i \leq x_{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{N}_+$ und $lim_{i \to \omega} |x_i| = \omega$, so existiert genau ein Wort $x \in \Sigma^\omega$ mit $x_i < x$ $\forall i \in \mathbb{N}_+$.*

Beweis: Offensichtlich: Setze $x(n) := x_i(n)$ für $|x_i| > n$.

■

Definition 1.1 (Limes) *Im Fall von Lemma 1.1 wird das eindeutig bestimmte infinitäre Wort x auch mit $lim^{\rightarrow} x_i$ bezeichnet und* limes, *bzw* limes superior *der x_i genannt.*

Die Konkatenation $x \circ y$, meist als xy geschrieben, zweier Wörter $x, y \in \Sigma^\infty$ ist definiert als

$$xy(n) := x(n), \text{ für } n \leq |x| \in \mathbb{N}, \text{ und } xy(n) := y(n - |x|), \text{ für } n > |x|.$$

Damit gilt

$$xy = x(1)...x(|x|)y(1)...y(|y|), \text{ für } x, y \in \Sigma^*,$$

$$xy = lim^{\rightarrow} xy[i], \text{ für } x \in \Sigma^* \text{ und } y \in \Sigma^\omega \text{ und}$$

$$xy = x, \text{ für } x \in \Sigma^\omega.$$

x heißt *Infix* von y, in Zeichen $x \subseteq y$, $:\Longleftrightarrow \exists u \in \Sigma^* : \exists v \in \Sigma^\infty : y = uxv$.
x heißt *Suffix* von y $:\Longleftrightarrow \exists u \in \Sigma^* : y = ux$.
Für Sprachen K, L ist

$$Prae(K) := \bigcup_{x \in K} Prae(x),$$

$$Infix(K) := \bigcup_{x \in K} Infix(x), \text{ und}$$

$$Suffix(K) := \bigcup_{x \in K} Suiffix(x).$$

$$KL := K \circ L := \{w \mid \exists x \in K : \exists y \in L : w = xy\},$$

$$K^0 := \{\varepsilon\}, K^{n+1} := K^n K,$$

$$K^* := \bigcup_{i \geq 0} K^i, \text{ und } K^+ := \bigcup_{i \geq 1} K^i.$$

Insbesondere gilt damit $K^+ = KK^*$ und $K^* = K^+ \cup \{\varepsilon\}$.

$K^{fin} := K \cap \Sigma^*$ ist der finitäre Anteil in K und
$K^{inf} := K \cap \Sigma^\omega$ ist der infinitäre Anteil in K.

Für eine finitäre Sprache M ist

$$min(M) := M - M\Sigma^+$$

der *minimale* Anteil von M. $min^i(M)$ ist induktiv definiert durch

$$min^1(M) := min(M), \; min^{i+1}(M) := min(M - \bigcup_{j \leq i} min^j(M)).$$

M heißt *minimal* oder *Präfixcodesprache*, falls $M = min(M)$ gilt.

Beispiel 1.1 *Es sei* $M = \{ab, aab, aba, aabaa, aabaaba\}$, *so gilt*

$$min^1(M) = \{ab, aab\},\ min^2(M) = \{aba, aabaa\},\ min^3(M) = \{aabaaba\}.$$

Offensichtlich existiert zu jedem $x \in K$ ein $y \in min(K)$ mit $y \leq x$ und zu jedem $x \in min^{i+1}(K)$ ein $y \in min^i(K)$ mit $y < x$. In einer Präfixcodesprache existieren keine zwei Wörter x, y mit $x < y$.

Folgende einfache Zusammenhänge gelten für nicht leere Sprachen K, L über Σ (siehe Boasson, Nivat [1] oder Hoogeboom, Rozenberg[2], pp271).

Lemma 1.2 *Es gilt*

- $\Sigma^\omega = \Sigma^*\Sigma^\omega = \Sigma^+\Sigma^\omega$,
- $K = K^{fin} \cup K^{inf},\ (K \cup L)^{fin} = K^{fin} \cup L^{fin},\ (K \cup L)^{inf} = K^{inf} \cup L^{inf}$,
- $(K \cap L)^{fin} = K^{fin} \cap L^{fin},\ (K \cap L)^{inf} = K^{inf} \cap L^{inf}$,
- $(KL)^{fin} = K^{fin}L^{fin},\ (KL)^{inf} = K^{fin}L^{inf} \cup K^{inf}$,
- $(K^*)^{fin} = (K^{fin})^*,\ (K^*)^{inf} = (K^{fin})^*K^{inf}$,
- $Prae(K) \subseteq \Sigma^*,\ Prae(Prae(K)) = Prae(K)$,
- $Prae(K \cup L) = Prae(K) \cup Prae(L),\ Prae(K \cap L) = Prae(K) \cap Prae(L)$,
- $Prae(KL) = Prae(K) \cup K^{fin}Prae(L)$,
- $Prae(K^*) = (K^{fin})^*Prae(K)$,
- $\forall K \in \Sigma^* : K\Sigma^\omega = min(K)\Sigma^\omega$.

Die Beweise sind offensichtlich.
Die Menge aller Wörter Σ^∞ über Σ bilden mit der Konkatenation $\circ$ ein Monoid mit 1-Element ε. Die Menge der Sprachen 2^{Σ^*} über Σ bildet mit der Konkatenation $\circ$ ein Monoid mit Einselement $\{\varepsilon\}$ und Nullelement $\emptyset$ wegen

$$K\emptyset = \emptyset K = \emptyset \text{ und } K\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}K = K.$$

Eine Sprache $K \subseteq \Sigma^\infty$ heißt *gerichtet* $:\Leftrightarrow \forall x, y \in K : \exists z \in K : x \leq z$ und $y \leq z$.
Eine *kleinste obere Schranke*, $Sup(K)$, von K ist ein Element $Sup(K) \in \Sigma^\infty$ mit

1. $\forall x \in K : x \leq Sup(K)$, und
2. $\forall y \in \Sigma^\infty : (\forall x \in K : x \leq y) \Rightarrow Sup(K) \leq y$.

Eine *cpo* (vollständiger, partiell geordneter Verband) ist ein Tupel (M, ρ) von einer Menge M und einer partiellen Ordnung ρ auf M, in der jede gerichtete Teilmenge eine kleinste obere Schranke besitzt.

Lemma 1.3 *$(\Sigma^\infty, \leq)$ ist eine cpo.*

Beweis: Jede gerichtete ∞-Sprache besitzt ein Wort maximaler Länge oder ihr limes superior als einziges unendliches Wort.

■

1.2 Sprachabschlüsse

Wir betrachten drei Abschlüsse, lim, adh und $.^\omega$, die jeweils Sprachen in infinitäre Sprachen umformen. Dabei sollen in $lim(K)$ alle Limiten nach Definition **??** liegen, die man in K bilden kann. Zu beachten ist dabei, dass zur Limesbildung nur finitäre Wörter in K herangezogen werden dürfen. In $adh(K)$ sollen alle Limiten liegen, die man aus $Prae(K)$ bilden kann, während in K^ω alle Konkatenationen unendlich vieler Wörter aus K liegen sollen, d.h.

$$K^\omega = \{x_1 x_2 ... x_i ... | x_i \in K - \{\varepsilon\}\}$$

ist angestrebt. Zu beachten ist hierbei allerdings, das diese Konkatenation unendlich vieler Wörter nach einem ersten Wort, das selbst unendlich lang ist, abbricht wegen

$$x_1 ... x_i ... x_j ... = x_1 ... x_i \text{ für } x_i \in K^{inf}.$$

Definition 1.2 (Sprachabschlüsse) *Der* Limes *(oder* Abschluss*) $lim(K)$ von $K \subseteq \Sigma^\infty$ ist definiert als*

$$lim(K) :=$$

$$\{w \in \Sigma^\omega | \exists \{u_i\}_{i \in \mathbb{N}_+} : \forall i \in \mathbb{N}_+ : (u_i \in K^{fin}, u_i \leq u_{i+1}, lim_{i \to \infty} |u_i| = \omega \text{ und } w = lim^{\rightarrow} u_i).$$

Die Adherence *$adh(K)$ von K ist definiert als*

$$adh(K) := lim(Prae(K)).$$

*Der ω-*Abschluss *M^ω für eine finitäre Sprache $M \subseteq \Sigma^*$ ist definiert als*

$$M^\omega := \{w \in \Sigma^\omega \mid \exists \{u_i\}_{i \in \mathbb{N}_+} : \forall i \in \mathbb{N}_+ : (u_i \in M - \{\varepsilon\} \text{ und } w = lim^{\rightarrow} v_i \text{ mit } v_i := u_1 ... u_i)\},$$

*und der ω-*Abschluss *einer Sprache $K \subseteq \Sigma^\infty$ ist definiert als*

$$K^\omega := (K^{fin})^* K^{inf} \cup (K^{fin})^\omega.$$

Per Definition ist $lim(K) = lim(K^{fin})$ und $lim(K^{inf}) = \emptyset$. Die Definition von K^ω berücksicht, dass eine unendliche Konkatenation abbricht, sobald ein unendlich langes Wort aus K an der Konkatenation beteiligt ist.

Beispiel 1.2 *$lim\{\varepsilon\} = adh\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}^\omega = \emptyset$. Es seien*
$K_1 := \{a\}^*\{b\}$, $K_2 := \{b\}\{a\}^*$, $K_3 := \{b\,a^\omega\}$, $K_4 := \{a\} \cup \{c\}\{a,b\}^*$,
$K_5 := \{a\}^*\{b\}^*$, $K_6 := \{a\}^*\{b\}^\omega$ und $K_7 := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}\{c\}^\omega$, so gilt:

$lim(K_1) = \emptyset$, $adh(K) = \{a^\omega\}$, $K_1^\omega = \{w \in \{a,b\}^\omega \mid \sharp_b(w) = \omega\}$,
$lim(K_2) = adh(K_2) = \{b\,a^\omega\}$, $K_2^\omega = \{w \in \{a,b\}^\omega \mid \sharp_b(w) = \omega$ und w beginnt mit $b\}$,
$lim(K_3) = \emptyset$, $adh(K_3) = K_3^\omega = K_3$,
$lim(K_4) = adh(K_4) = \{c\}\{a,b\}^\omega$, $K_4^\omega = \{a,c\}((\{a,b,c\}^*c)^\omega \cup \{a,b,c\}^*\{a\}^\omega)$,
$lim(K_5) = adh(K_5) = \{a\}^\omega \cup K_6 = adh(K_6)$, $lim(K_6) = \emptyset$, $K_5^\omega = \{a,b\}^\omega$, $K_6^\omega = K_6$,
$lim(K_7) = \emptyset$, $adh(K_7) = K_7 \cup \{a\}^\omega$, $K_7^\omega = K_7$.

Wir werden folgendes Beispiel eine Sprache, die nicht als limes dargestellt werden kann, häufiger benutzen:

Lemma 1.4 *Für jedes $M \subseteq \{a,b\}^*$ gilt*

$$\{a,b\}^*ba^\omega \neq lim(M).$$

Beweis. Annahme, es gilt $\{a,b\}^*ba^\omega = lim(M)$ für ein $M \subseteq \{a,b\}^*$, so definiert man eine Folge $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ mit $u_i \in M$ durch

$$u_1 := ba^k$$

für ein k mit mit $ba^k \in M$ (dies existiert wegen $ba^\omega \in \{a,b\}^*ba^\omega \subseteq lim(M)$) und

$$u_{i+1} := u_i ba^l$$

für ein l mit $u_i ba^l \in M$ (dies existiert wegen $u_i ba^\omega \in \{a,b\}^*ba^\omega \subseteq lim(M)$). Dann gilt aber $lim^{\rightarrow}u_i \in lim(M) - \{a,b\}^*ba^\omega$, da $lim^{\rightarrow}u_i$ unendlich viele b enthält.

"$\exists^\omega i \in \mathbb{N}_+ : E(i)$" (gelesen: "Es existieren unendlich viele i mit E trifft auf i zu.") ist eine Abkürzung für "$\forall j \in \mathbb{N}_+ : \exists i \in \mathbb{N}_+ : (i > j$ und $E(i))$". Es gelten folgende einfache Zusammenhänge:

Lemma 1.5 *Sei K eine Sprache, so gilt*

1. *$w \in lim(K)$*
   $\iff \exists^\omega i \in \mathbb{N}_+ : (w[i] \in K^{fin}$ und $|w[i]| = i)$
   $\iff \forall i \in \mathbb{N}_+ : \exists x_i \in K^{fin} : x_i < x_{i+1} < w$
   $\iff \forall i \in \mathbb{N}_+ : \exists x_i \in min^i(K^{fin}) : x_i < w$,

2. *$w \in adh(K)$*
   $\iff \exists^\omega i \in \mathbb{N}_+ : (|w[i]| = i$ und $w[i] \in Prae(K))$
   $\iff |w| = \omega$ und $Prae(w) \subseteq Prae(K)$,

3. *allerdings gilt nicht $K^\omega = lim((K - \{\varepsilon\})^+)$.*

Beweis 1.: Es gilt $x_i \leq x_{i+1} < w$ mit $x_i \in K^{fin}$ und $|x_i| \to \omega$, genau dann wenn so eine streng monotone Teilfolge $x_{i_j} < x_{i_{j+1}} < w$ von $X_i \in K^{fin}$ existiert. Wegen Lemma 1.2 kann man dabei o.E. x_1 aus $min(K^{fin})$ wählen. Ebenso findet man für $x_1 < x_2$ ein $x_2' \in min(K^{fin} - min(K^{fin})) = min^2(K^{fin})$ mit $x_1 < x_2' \leq x_2$, also kann man o.E. x_2 aus $min^2(K^{fin})$ wählen und allgemein x_i aus $min^i(K^{fin})$.

3.: Betrachte K_4 aus Beispiel 1.2. Es gilt $cb < cb \circ a < cbab \circ a \circ a < cbabaa...ba^n b(\circ a)^{n+1}$, d.h. $u_i := cbaba^2ba^3b...ba^i...$ liegt in $(K_4 - \{\varepsilon\})^{i+1}$, aber $lim^{\rightarrow} u_i \in lim((K_4 - \{\varepsilon\})^*)$ besitzt nur ein Vorkommen von c und liegt daher nicht in K_4^ω.

■

Es gelten zahlreiche Beziehungen zwischen den verschiedenen Abschlüssen. Die wichtigsten sind im folgenden Satz aufgeführt. Die Beziehungen ohne angegebene Beweise sind offensichtlich. Sobald die Beweise nur leicht schwierig werden, sind sie auch angegeben.

Satz 1.1 (Abschlusseigenschaften) *Es seien K, L Sprachen, M, N finitäre Sprachen und P eine finitäre Präfixcodesprache über einem Alphabet Σ. Dann gilt im Allgemeinen:*

1. $K^\omega = (K^*)^\omega = (K^+)^\omega$,
2. $Prae(K^\omega) = Prae(K^+) = Prae(K^*) = (K^{fin})^* Prae(K)$,
3. $K \subseteq L \implies lim(K) \subseteq lim(L)$, $adh(K) \subseteq adh(L)$ *und* $K^\omega \subseteq L^\omega$,
4. $lim(K \cup L) = lim(K) \cup lim(L)$,
5. $adh(K \cup L) = adh(K) \cup adh(L)$,
6. $(K \cup L)^\omega \not\subseteq K^\omega \cup L^\omega \subseteq (K \cup L)^\omega$,
7. $M^\omega \subseteq lim(M^*) = lim(M^+) \not\subseteq M^\omega$,
8. $K\,lim(L) \not\subseteq lim(KL) \not\subseteq K\,lim(L)$,
9. $M\,lim(N) \subseteq lim(MN) \not\subseteq M\,lim(N)$,
10. $lim(P) = \emptyset$, $lim(PK) = P\,lim(K)$, $P^\omega = lim(P^+)$,
11. $M^\omega \not\subseteq lim(M) \not\subseteq M^\omega$, $M^\omega \not\subseteq adh(M) \not\subseteq M^\omega$,
12. $adh(M) \not\subseteq lim(M) \subseteq adh(M)$,
13. $K^{inf} \subseteq adh(K)$,
14. $Prae(adh(K)) \subseteq Prae(K)$,

15. $adh(KL) = adh(K) \cup Kadh(L)$,

16. $adh(K^\omega) = adh(K^+) = adh(K^*) = K^*adh(K) \cup K^\omega$,

17. $adh(K) = \emptyset \iff (K^{inf} = \emptyset$ *und* K^{fin} *ist endlich* $) \iff Prae(K)$ *ist endlich,*

18. $Prae(adh(K)) = Prae(K^{inf}) \cup \{x \in \Sigma^* \mid \{x\}\Sigma^* \cap K^{fin}$ *ist unendlich*$\}$,

19. $adh(adh(K)) = adh(K)$,

20. $M \subseteq \Sigma^*$ *und* M *minimal* $\implies adh(M) \cap M\Sigma^\omega = \emptyset$.

Beweis 4.: $w \in lim(K \cup L) \iff \exists^\omega i : (|w[i]| = i$ und $w[i] \in K^{fin} \cup L^{fin}) \iff \exists^\omega i : (|w[i]| = i$ und $w[i] \in K^{fin})$ oder $\exists^\omega i : (|w[i]| = i$ und $w[i] \in L^{fin}) \iff w \in lim(K) \cup lim(L)$.
5.: $lim(Prae(K \cup L)) = lim(Prae(K) \cup Prae(L)) = lim(Prae(K)) \cup lim(Prae(L))$.
6.: $\{a,b\}^\omega \nsubseteq \{a\}^\omega \cup \{b\}^\omega$.
7.: $w \in M^\omega \implies w = u_1u_2...u_i... \in lim(M^*) = lim(M^+)$, $cbaba^2ba^3...ba^i... \in lim(K_4^*) - K_4^\omega$, siehe Beispiel K_4.
8.: Wähle K als infinitäre und L als finitäre Sprache für die erste Ungleichung und K als finitäre und L als infinitäre Sprache plus ε für die zweite Ungleichung.
9.: $w \in Mlim(N) \implies w = vlim^{\rightarrow}u_i = lim^{\rightarrow}vu_i \in lim(MN)$. Sei $M = \{a\}^*, N = \{a\}$, dann ist $a^\omega \in lim(MN) - Mlim(N)$, wegen $lim(N) = \emptyset$.
10.: Man sieht leicht: $x \in P, y \in P^+, x < y \implies \exists z \in P^+ : y = xz$. Es genügt $lim(P^+) \subseteq P^\omega$ zu zeigen, der Rest ist klar. Sei also $w = lim^{\rightarrow}u_i$ mit $\forall i \in \mathbb{N}_+ : u_i \in \mathbb{N}_+, u_i \leq u_{i+1}$. O.E. gelte für alle $i : u_i < u_{i+1}$ und $u_1 \in P$. $u_1 < u_2 \implies \exists z \in P^+ : u_2 = u_1z$, dabei sei o.E. $z \in P$, d.h. $u_2 \in P^2$. Sei $u_i < u_{i+1}$ und $u_i \in P^i$, so existieren $v_1, ..., v_i \in P : u_i = v_1...v_i < u_{i+1} = v_1...v_2z$, für ein z. Wegen $v_i < v_iz \in P^+, v_1 \in P$ folgt $z \in P^+$. O.E. sei $z \in P$, also $u_{i+1} \in P^{i+1}$. D.h. $w = lim^{\rightarrow}u_i \in P^\omega$.
11.: Sei $M = K_2$.
12.: Wähle $M = K_1$, $lim(M) \subseteq lim(Prae(M))$.
13.: $x \in K^{inf} \implies Prae(x) \subseteq Prae(K^{inf}) \implies K^{inf} \subseteq adh(K^{inf}) \subseteq adh(K)$.
14.: $Prae(lim(Prae(K)) \subseteq Prae(K)$.
15: $adh(KL) = lim(Prae(KL)) = lim(Prae(K) \cup K^{fin}Prae(L)) = lim(Prae(K)) \cup lim(K^{fin}Prae(L)) = \cup lim(K^{fin}Prae(L)) = adh(K) \cup Kadh(L)$. Die letzte Gleichung sieht man wie folgt:
1.) $w = lim^{\rightarrow}u_i \in lim(K^{fin}Prae(L)) \implies \forall i : \exists x_i \in K^{fin} : \exists z_i \in Prae(L) : u_i = x_iz_i$.
Fall 1: $\exists$ Teilfolge $\{x_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}_+}$, die stationär wird, d.h. $x_{i_N} = x_{i_{N+k}}$ gilt für alle k für ein geeignetes N. Damit gilt $w = lim^{\rightarrow}x_iz_i = lim^{\rightarrow}x_{i_j}z_{i_j} = x_N lim^{\rightarrow}z_{i_j} \in K^{fin}lim(Prae(L))$.
Fall 2: $\exists$ Teilfolge $\{x_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}_+}$ mit $\forall j : x_{i_j} < x_{i_{j+1}}$. Damit gilt $w = lim^{\rightarrow}x_{i_j}z_{i_j} = lim^{\rightarrow}x_{i_j} \in lim(K^{fin})$. Also $lim(K^{fin}Prae(L)) \subseteq lim(K^{fin}) \cup K^{fin}lim(Prae(L)) \subseteq adh(K) \cup Kadh(L)$.
2.) $Kadh(L) = Klim(Prae(L)) = K^{inf} \cup K^{fin}lim(Prae(L)) \subseteq adh(K) \cup$ $lim(K^{fin}$ $Prae(L))$.
16.: $adh(K^\omega) = lim(Prae(K^\omega)) = lim(Prae(K^*)) = lim(Prae(K^+))$. Also $adh(K^\omega) =$

$adh(K^*) = adh(K^+) = adh(KK^*) = adh(K) \cup Kadh(K^*)$. Die rekursive Gleichung $x = adh(K) \cup Kx$ hat die Lösung $x = K^*adh(K) \cup K^\omega$, wie man leicht nachrechnet:
$(x =)K^*adh(K) \cup K^\omega =$
$K^0adh(K) \cup K^+adh(K) \cup KK^\omega =$
$adh(K) \cup K(K^*adh(K) \cup K^\omega)(= adh(K) \cup Kx)$.
17.: $\Leftarrow, \Leftrightarrow$ ist klar. Damit genügt es zeigen, dass $Prae(K)$ unendlich schon $adh(K) \neq \emptyset$ impliziert. Sei also $Prae(K)$ unendlich. $Prae(K)$ wird ein unendlicher Baum mit Outdegree $\leq |\Sigma|$, wenn wir eine Kante von $u \in Prae(K)$ nach $v \in Prae(K)$ genau dann setzen, wenn $v = ua$ gilt für ein a geeignet aus Σ. Nach Königs Lemma besitzt dieser Baum damit einen unendlich langen Weg $u_1 < u_2... < u_i < ..$, mit $lim^{\rightarrow}u_i \in adh(K)$.
18.: $w \in Prae(adh(K)) \Longleftrightarrow |w| < \omega$ und $\exists z \in \Sigma^\omega : wz \in lim(Prae(K))$
$\Longleftrightarrow |w| < \omega$ und $\exists z : Prae(wz) \subseteq Prae(K)$
$\Longleftrightarrow w \in Prae(K^{inf})$ oder $w\Sigma^* \subseteq Prae(K^{fin})$
$\Longleftrightarrow w \in Prae(K^{inf})$ oder $w\Sigma^* \cap K^{fin}$ ist unendlich. 19.: $w \in lim(\{x \in \Sigma^* \mid x\Sigma^* \cap K^{fin}$ ist unendlich $\}) \Longleftrightarrow w = lim^{\rightarrow}u_i$ mit $u_i < u_{i+1}$ und $u_i\Sigma^* \cap K^{fin} \neq \emptyset$ für alle $i \Longleftrightarrow w = lim^{\rightarrow}u_i$ mit $u_i < u_{i+1}$ und $u_i \in Prae(K^{fin})$ für alle i. Damit gilt $adh(adh(K)) = lim(Prae(adh(K))) = lim(Prae(K^{inf}) \cup \{x \in \Sigma^* \mid x\Sigma^* \cap K^{fin}$ ist unendlich$\}) = adh(K^{inf}) \cup lim(\{x \in \Sigma^* \mid x\Sigma^* \cap K^{fin}$ ist unendlich$\}) = adh(K^{inf}) \cup lim(Prae(K^{fin})) = adh(K^{inf}) \cup adh(K^{fin}) = adh(K)$.
20.: Ann.: M sei minimal und es existiert ein $w \in adh(M) \cap M\Sigma^\omega$. Dann ist $Prae(w) \subseteq Prae(M)$ und $\exists n : w[n] \in M$. Wegen $|w| = \omega$ und $Prae(w) \subseteq Prae(M)$ existiert ein $x \in M$ mit $w[n] < w[n+1] \leq x$, im Widerspruch zur Minimalität von M.

$\blacksquare$

$Prae(adh(K))$ wird auch Zentrum von K genannt und mit $ctr(K)$ bezeichnet. Interessante Eigenschaften von $ctr(K)$ finden sich in Boasson, Nivat [1], wiedergegeben auch in Hoogeboom, Rozenberg [2].

1.3 Ramsey-Zerlegungen

Ein Satz von Ramsey ist in der Theorie infinitärer Sprachen sehr hilfreich. Es genügt aber eine schwache Version dieses Satzes von Ramsey, die wir hier vorstellen und auch beweisen wollen.

Definition 1.3 (Ramsey-Zerlegung) *Eine* Zerlegung *eines Wortes $w \in \Sigma^\omega$ ist eine Folge $\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ von Wörtern $w_i \in \Sigma^+$ mit*

$$w = w_1w_2...w_i....$$

Eine Makro-Zerlegung *einer solchen Zerlegung eines infinitären Wortes ist eine streng monoton steigende Folge $\{i_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ von natürlichen Zahlen mit $i_0 = 1$. Diese Makro-*

Zerlegung wird mit der Darstellung

$$w = (w_{i_0}...w_{i_1-1})(w_{i_1}...w_{i_2-1})...(w_{i_j}...w_{i_{j+1}-1})...$$

identifiziert.
Es seien E eine endliche Menge und sei $f : \Sigma^+ \to E$ eine Abbildung. Eine f-Ramsey-Zerlegung *eines Wortes $w = w_1...w_i...$ in einer gegebenen Zerlegung $\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ ist dann eine Makro-Zerlegung $\{i_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass ein $e \in E$ existiert mit*

$$f(w_{i_j}...w_{i_{j+1}-1}) = e \textit{ für alle } j > 0.$$

D.h. w muss eine Darstellung

$$w = (w_{i_0}...w_{i_1-1})(w_{i_1}...w_{i_2-1})...(w_{i_j}...w_{i_{j+1}-1})...$$

besitzen mit

$$\forall j > 0 : \; f(w_{i_j}...w_{i_{j+1}-1}) = e.$$

Insbesondere gilt

$$w \in \Sigma^* \circ (f^{-1}(e))^\omega.$$

Satz 1.2 (Satz von Ramsey) *Es seien E eine endliche Menge, Σ ein Alphabet und $f : \Sigma^+ \to E$ eine Abbildung. Dann existiert zu jeder Zerlegung jedes infinitären Wortes über Σ eine f-Ramsey-Zerlegung.*

Beweis: Für $w = w_1...w_i...$ definieren wir zwei Folgen

$$(A_i)_{i\in\mathbb{N}}, \; (x_i)_{i\in\mathbb{N}_+}$$

mit $A_i \subseteq \mathbb{N}, \; x_i \in E$ wie folgt:
$A_0 := \mathbb{N}$.
Sei A_i bereits definiert. Dann sei $n_i := min(A_i)$. Für $x \in E$ sei

$$T_{i,x} := \{n \in A_i \mid n > n_i \text{ und } f(w_{n_i}...w_{n-1}) = x\}.$$

Wähle ein x mit $|T_{i,x}| = \omega$ und setze

$$A_{i+1} := T_{i,x} \text{ und } x_{i+1} := x.$$

Wähle ein $e \in E$, das in der Folge $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ unendlich oft vorkommt. Es sei $\{i_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ die streng monoton angeordnete wachsend Folge aller Indizes i_j mit $x_{i_j} = e$. Damit gilt

$$w = (w_1...w_{n_{i_1}-1})(w_{n_{i_1}}...w_{n_{i_2}-1})(w_{n_{i_2}}...w_{n_{i_3}-1})...$$

und für alle $j > 0$ gilt

$$f(w_{n_{i_j}}...w_{n_{i_{j+1}}-1}) = e,$$

und die f-Ramsey-Zerlegung ist gefunden.

■

2 Reguläre und rationale infinitäre Sprachen

2.1 ω-reguläre Sprachen

Definition 2.1 (Reguläre Sprachen) *Die Klasse Reg_Σ^∞ der* regulären Sprachen *über einem Alphabet Σ ist induktiv definiert:*

$$\emptyset \in Reg_\Sigma^\infty \text{ und } \forall a \in \Sigma : \{a\} \in Reg_\Sigma^\infty,$$

$$\text{sind bereits } K, L \in Reg_\Sigma^\infty, \text{ so auch } K \cup L, KL, K^* \text{ und } K^\omega.$$

Die Klasse Reg_Σ der finitären regulären Sprachen *über Σ erhält man, wenn man in der Definition von Reg_Σ^∞ auf den $.^\omega$-Operator verzichtet.*
Die Klasse Reg_Σ^ω der infinitären regulären Sprachen *über Σ ist definiert als*

$$K \in Reg_\Sigma^\omega :\Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall i \leq n : \exists M_i, N_i \in Reg_\Sigma : K = \bigcup_{i \leq n} M_i N_i^\omega.$$

Sprachen in Reg^ω werden auch ω-reguläre Sprachen genannt.

Wir nutzen die üblichen Abkürzungen, bei denen auf die $\{$- und $\}$-Klammern verzichtet wird. Also z.B. $(b^*a)^\omega$ statt $(\{b\}^*\{a\})^\omega$, etc. Formal kann man dazu *reguläre Ausdrücke* über Σ induktiv definieren als

- 0 und a für alle $a \in \Sigma$ sind reguläre Ausdrücke über Σ,
- sind x, y bereits reguläre Ausdrücke über Σ, so auch xy, $x + y$, x^* und x^ω.

Nun interpretiert man 0 als die Sprache $\emptyset$, a als $\{a\}$. Sind x und y bereits als die Sprachen K und L interpretiert, so interpretieren wir xy als KL, $x + y$ als $K \cup L$, x^* als K^* und x^ω als K^ω. Die Sprachen K_1 bis K_7 aus Beispiel 1.2 werden damit zu a^*b, ba^*, ba^ω, $a + c(a + b)^*$, a^*b^*, a^*b^ω und K_7 kann nicht durch einen regulären Ausdruck beschrieben werden.

Lemma 2.1 *Es gilt*

- $Reg_\Sigma^\infty \subseteq 2^{\Sigma^\infty}$, $Reg_\Sigma^\omega = Reg_\Sigma^\infty \cap 2^{\Sigma^\omega}$
- $K \in Reg_\Sigma^\infty \Longleftrightarrow \exists M \in Reg_\Sigma : \exists L \in Reg_\Sigma^\omega : K = M \cup L$
- $Prae(Reg_\Sigma^\omega) \subseteq Reg_\Sigma$

Beweis: Die ersten beiden Aussagen sind klar. Zur letzten: $K \in Reg_\Sigma^\omega \implies \exists n : \forall i \leq n : \exists M_i, N_i \in Reg : K = \bigcup_{i \leq n} M_i N_i^\omega \implies Prae(K) = \bigcup_{i \leq n} Prae(M_i N_i^\omega) = \bigcup_{i \leq n}(Prae(M_i) \cup M_i Prae(N_i^\omega)) = \bigcup_{i \leq n}(Prae(M_i) \cup M_i N_i^* Prae(N_i)) \in Reg_\Sigma$, da Reg_Σ abgeschlossen gegen Präfixbildung ist.

■

Der Index Σ wird der besseren Lesbarkeit i.A. weggelasen. Reg^ω bezeichnet also Reg^ω_Σ für ein Σ, das aus dem Zusammenhang bekannt oder unwichtig ist.

2.2 Büchi- und Muller-Automaten

Definition 2.2 (Automat) *Ein Automat A über Σ ist ein Tupel*

$$A = (S, \Sigma, \Delta, s_0) \text{ von}$$

- *einer endlichen Menge S von Zuständen,*
- *einem endlichen Alphabet Σ von Buchstaben,*
- *einem Startzustand s_0 aus S und*
- *einer (i.A. indeterminierten) Übergangsfunktion*

$$\Delta : S \times \Sigma \to 2^S.$$

A heißt vollständig *falls für alle $(s, a) \in S \times \Sigma$ gilt: $|\Delta((s, a))| \geq 1$.*
A heißt determiniert *falls für alle $(s, a) \in S \times \Sigma$ gilt: $|\Delta((s, a))| = 1$.*

Für determinierte Automaten schreiben wir auch δ statt Δ und benutzen δ^* wie üblich definiert. Automaten besitzen hier keine Finalzustände. Sie werden deshalb auch manchmal *Halbautomat* genannt. Jeder determinierte Automat ist per Definition auch schon vollständig. Ein run von A ist ein endlicher oder unendlich langer Weg durch A vom Startzustand aus, indem die Zwischenzustände mit aufgeführt werden. Formal:

Definition 2.3 (Run) *$r \in (S \cup \Sigma)^\infty$ heißt run von $s \in S$ aus in A :$\Longleftrightarrow$*

- *r beginnt mit s,*
- *ist r endlich, so endet r mit einem Buchstaben in S,*
- *in r kommt kein Wort aus $S^2 \cup \Sigma^2$ als Infix vor und*
- *für jedes Infix $sas' \subseteq r$ muss $s' \in \Delta(s, a)$ gelten.*

Run^A_s, oder nur Run, falls s und A unwichtig oder aus dem Kontext klar sind, bezeichnet die Menge aller runs in A von s aus.

Die Homomorphismen $\beta, \sigma : Run \to S^\infty \cup \Sigma^\infty$ sind definiert durch $\forall s \in S : \forall a \in \Sigma$:

$$\beta(s) := \varepsilon \textit{ und } \beta(a) := a,$$

$$\sigma(s) := s \textit{ und } \sigma(a) := \varepsilon.$$

$\beta(r)$ heißt die Beschriftung *oder das* Wort *des runs r und $\sigma(r)$ dessen* Zustandsfolge*.*

Für $w \in \Sigma^\infty$ ist

$$Run_s^A(w) := \{r \in Run_s \mid \beta(r) = w\}$$

die Menge der w-runs vom Zustand s aus. Für $r \in Run$ ist

$$Zu(r) := \{s \in S \mid \sharp_s(\sigma(r)) > 0\}$$

der von r angenommene Zustandsraum *aller Zustände, die r* berührt *oder* annimmt*, und*

$$Inf(r) := \{s \in S \mid \sharp_s(\sigma(r)) = \omega\}$$

die Menge der in r unendlich oft angenommenen oder berührten Zustände.
Für einen determinierten Automaten besteht für jedes $w \in \Sigma^\omega$ $Run_s(w)$ aus genau einem run, den wir auch mit sw bezeichnen.

Je nach Wahl der Finalzustände unterscheidet man Büchi- (nach [3]) und Muller-Automaten (nach [4]).

Definition 2.4 (Büchi-Automat) *Ein* Büchi-Automat *ist ein Tupel*

$$B = (S, \Sigma, \Delta, s_0, F)$$

(oder einfach nur $B = (A, F)$) von einem Automaten $A = (S, \Sigma, \Delta, s_0)$ und einer Menge $F \subseteq S$ von finalen *Zuständen.*

Definition 2.5 (Rationale Sprachen, 2-Akzeptanz) *Die klassische von einem Büchi-Automaten $B = (S, \Sigma, \Delta, s_0, F)$ akzeptierte* rationale *finitäre Sprache ist*

$$L_{fin}(B) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists r \in Run_{s_0}(w) : \ r \textit{ endet in einem finalen Zustand}\}.$$

Rat_Σ (bzw Rat_Σ^d) ist die Klasse aller von Büchi-Automaten (bzw von determinierten Büchi-Automaten) akzeptierten rationalen finitären Sprachen über Σ.

B 2-akzeptiert *ein Wort $w \in \Sigma^\omega :\Longleftrightarrow$*

$$\exists r \in Run_{s_0}(w) : \ Inf(r) \cap F \neq \emptyset.$$

$L_2(B) := \{w \in \Sigma^\omega \mid B$ *2-akzeptiert* $w\}$ *ist die* 2-akzeptierte Sprache *von* B *und* $Rat^\omega_{2,\Sigma}$ *ist die Klasse aller 2-akzeptierten infinitären Sprachen über dem Alphabet* Σ .

$Rat^\infty_{2,\Sigma} := Rat^\omega_{2,\Sigma} \cup Rat_\Sigma$ *ist die Klasse der 2-akzeptierten Sprachen. Analog sind* $Rat^{d,\infty}_{2,\Sigma}$ *und* $Rat^{d,\omega}_{2,\Sigma}$ *die Klassen der von determinierten Büchi-Automaten 2-akzeptierten Sprachen, bzw infinitären Sprachen.*

Für einen Automaten $A = (S, \Sigma, \Delta, s_0)$ *und Zustände* $s, s' \in S$ *bezeichnet* $L_{s,s'}(A)$ *oder nur* $L_{s,s'}$ *die finitäre reguläre Sprache*

$$L_{s,s'} := L_{fin}((S, \Sigma, \Delta, s, \{s'\})).$$

Wir werden wieder den Index Σ in der Regel weglassen. Für finitäre Sprachen werden die bekannten Zusammenhänge

$$Rat = Rat^d = Reg$$

im Folgenden ständig verwendet.

Definition 2.6 (Muller-Automat) *Ein Muller-Automat ist ein Tupel*

$$A = (S, \Sigma, \Delta, s_0, \mathcal{F})$$

oder $(A', \mathcal{F})$ *von einem Automaten* $A' = (S, \Sigma, \Delta, s_0)$ *und einer Menge* $\mathcal{F} \subseteq 2^S$ *von Mengen von finalen Zuständen.* $|\mathcal{F}|$ *heißt die Dimension von* A.

Für eine Menge $\mathcal{F}$ von Mengen ist $\bigcup \mathcal{F} := \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$.

Definition 2.7 (3-Akzeptanz)

$$L_{fin}(A) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists r \in Run_{s_0}(w) : \ r \text{ endet in einem finalen Zustand aus } \bigcup \mathcal{F}\}$$

ist die von einem Muller-Automaten $A = (S, \Sigma, \Delta, s_0, \mathcal{F})$ *akzeptierte finitäre Sprache.*

Ein Muller-Automat A 3-akzeptiert *ein Wort* $w \in \Sigma^\omega :\Longleftrightarrow$

$$\exists r \in Run^A_{s_0}(w) : \ r \text{ ist unendlich und } Inf(r) \in \mathcal{F}.$$

$L_3(A) := \{w \in \Sigma^\omega \mid A$ *3-akzeptiert* $w\}$ *ist die* 3-akzeptierte *Sprache von* A *und*
$Rat^\omega_{3,\Sigma}$ *ist die Klasse aller 3-akzeptierten infinitären Sprachen über* Σ.
$Rat^\infty_{3,\Sigma} := Rat^\omega_{3,\Sigma} \cup Rat_\Sigma$ *ist die Klasse der 3-akzeptierten Sprachen.*
$Rat^{d,\infty}_{3,\Sigma}$ *und* $Rat^{d,\omega}_{3,\Sigma}$ *sind die Klassen der von determinierten Muller-Automaten 3-akzeptierten Sprachen, bzw infinitären Sprachen, wobei der Index* Σ *in der Regel weggelassen wird.*

Ein Muller-Automa der Dimension 1 kann zwar als Büchi-Automat aufgefasst werden, aber 2- und 3-Akzeptanz stimmen dann i.A. nicht überein.

Beispiel 2.1 *Es sei A der determinierte Automat aus Abbildung 1, so gilt mit $\Sigma = \{a, b\}$:*

- $L_2((A, \{s_1, s_2\})) = \Sigma^\omega$,
- $L_2(A, \{s_2\}) = (b^*a)^\omega$,
- $L_3(A, \{\{s_1, s_2\}\})) = \Sigma^\omega - \Sigma^*\{a^\omega, b^\omega\}$,
- $L_3((A, \{\{s_2\}\})) = \Sigma^* a^\omega$ *und*
- $L_3((A, \{\{s_1\}, \{s_2\}, \{s_1, s_2\}\})) = \Sigma^\omega$.

□

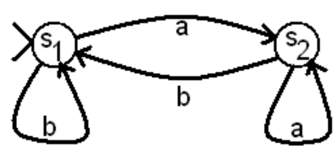

Figure 1: Ein Automat

Wir untersuchen jetzt Klassen infinitärer Sprachen. Dazu verwenden wir folgende Abkürzungen für $i = 2, 3$:

$$Rat_i := Rat_i^\omega, \text{ und } Rat_i^d := Rat_i^{d,\omega}.$$

Man kann jeden Büchi- und Muller-Automaten durch Hinzunahme eines *sink*-Zustandes vervollständigen, in den alle zuvor leeren Übergänge führen und aus dem kein Übergang wieder herausführt, ohne dass sich die (2-, bzw. 3-) akzeptierte Sprache verändert.

Abmachung: Im Folgenden seien alle Büchi- und Müller-Automaten vollständig. Davon weichen wir nur in Beispielen ab, um kürzere Automaten angeben zu können.

Satz 2.1 (Vereinigung, Duchschnitt, Komplement) *Es gilt*

- Rat_3^d *ist abgeschlossen gegen Vereinigung, Durchschnitt und Komplement,*
- Rat_2 *und* Rat_2^d *sind abgeschlossen gegen Vereinigung und Durchschnitt.*

Beweis: 1.) Für zwei vollständige Automaten $A_i = (S_i, \Sigma_i, \Delta_i, s_i)$ sei

$$A_1 \| A_2 := (S_1 \times S_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \Delta_1 \times \Delta_2, (s_1, s_2)), \text{ mit}$$
$$(\Delta_1 \times \Delta_2)((s, s'), a) := \Delta_1(s, a) \times \Delta_2(s', a).$$

Im Automaten $A_1 \| A_2$ entspricht also jeder $w - run$ von (s, s') aus der parallelen Ausführung eines $w - runs$ von s aus in A_1 und von s' aus in A_2. Sind beide A_i determiniert, so auch $A_1 \| A_2$. Man beachte, dass diese Definition für vollständige Automaten A_1, A_2 gilt. Für unvollständige sind die angegebenen Konstruktionen nicht korrekt.
Es seien $L_1, L_2 \in Rat_3^d$, so existieren determinierte Automaten $A_i = (S_i, \Sigma_i, \Delta_i, s_i)$ und endliche Mengen $\mathcal{F}_i$ von Teilmengen von S für i=1,2 mit $L_i = L_3((A_i, \mathcal{F}_i))$. Damit akzeptieren
$A_1^- := (A_1, 2^{S_1} - \mathcal{F}_1)$ gerade $\Sigma^\omega - L_3(A_1)$,
$A^\cap := (A_1 \| A_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ gerade $L_3(A_1) \cap L_3(A_2)$, und
$A^\cup := (A_1 \| A_2, \mathcal{F}')$ gerade $L_3(A_1) \cup L_3(A_2)$, wenn man

$$\mathcal{F}' := \{K \subseteq S_1 \times S_2 | \pi_1(K) \in \mathcal{F}_1 \text{ oder } \pi_2(K) \in \mathcal{F}_2\}$$

setzt. Hierbei ist π_i die Projektion auf die i-te Koordinate. Also $\pi_1(K) = \{s \in S_1 | \exists s' \in S_2 : (s, s') \in K\}$, $\pi_2(K) = \{s' \in S_2 | \exists s \in S_1 : (s, s') \in K\}$.
2.) Es seien $L_1, L_2 \in Rat_2$, so existieren Automaten $A_i = (S_i, \Sigma_i, \Delta_i, s_i)$ und endliche Mengen $F_i \subseteq S$ für i=1,2 mit $L_i = L_2((A_i, F_i))$. Es gilt wie eben

$$L_2(A_1 \| A_2, (F_1 \times S_2) \cup (S_1 \times F_2)) = L_1 \cup L_2.$$

Es gilt aber selbst für determinierte Automaten A_i nun im Allgemeinen

$$L_2((A_1, S_1 - F_1)) \neq \Sigma^\omega - L_1,$$

da für $w \in L_1$ der run $s_0 w$ sowohl Zustände aus F_1 als auch aus $S_1 - F_1$ unendlich oft berühren kann. Ebenso gilt im Allgemeinen

$$L_2((A_1 \| A_2, F_1 \times F_2)) \neq L_1 \cap L_2,$$

da für $w \in L_1 \cap L_2$ der run $s_0 w$ in $A_1 \| A_2$ unendlich oft zu verschiedenen Zeitpunkten in A_1 einen Zustand aus F_1 als in A_2 einen Zustand aus F_2 annehmen kann. Man kann die Konstruktion für $L_1 \cap L_2$ aber durch einen kleinen Mehraufwand retten: Definiere

$$A^\cap := (S_1 \times S_2 \times \{0, 1, 2\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \Delta', (s_1, s_2, 0)) \text{ mit}$$

$\Delta'((s_1, s_2, 0), a)) := \Delta_1(s_1, a) \times \Delta_2(s_2, a) \times \{0\}$, falls $\Delta_1(s_1, a) \cap F_1 = \emptyset$,
$\Delta'((s_1, s_2, 0), a)) := \Delta_1(s_1, a) \times \Delta_2(s_2, a) \times \{1\}$, falls $\Delta_1(s_1, a) \cap F_1 \neq \emptyset$,
$\Delta'((s_1, s_2, 1), a)) := \Delta_1(s_1, a) \times \Delta_2(s_2, a) \times \{1\}$, falls $\Delta_2(s_2, a) \cap F_2 = \emptyset$,
$\Delta'((s_1, s_2, 1), a)) := \Delta_1(s_1, a) \times \Delta_2(s_2, a) \times \{2\}$, falls $\Delta_1(s_2, a) \cap F_2 \neq \emptyset$,

$\Delta'((s_1, s_2, 2), a)) := \Delta_1(s_1, a) \times \Delta_2(s_2, a) \times \{0\}$.

Sind beide A_i determiniert, so auch $A^\cap$. Sei $F' := S_1 \times S_2 \times \{2\}$, so gilt:

$w \in L_2(A^\cap, F')$
$\iff \exists r \in Run_{s_0}^{A_1\|A_2}(w)$: r berührt einen Zustand der Form $(s, s', 2)$ unendlich oft
$\iff \exists r_1 \in Run_{s_1}^{A_1}(w)$: r_1 berührt einen Zustand aus F_1 unendlich oft und $\exists r_2 \in Run_{s_2}^{A_2}(w)$: r_2 berührt einen Zustand aus F_2 unendlich oft
$\iff w \in L_1 \cap L_2$.

■

Lemma 2.2 *Es gilt*

- *für jeden Büchi-Automaten A:* $L_2(A) \subseteq lim(L_{fin}(A))$,
- *für jeden determinierten Büchi-Automaten A:* $L_2(A) = lim(L_{fin}(A))$,
- *es existiert ein indeterminierter Büchi-Automat A mit* $L_2(A) \neq lim(L_{fin}(A))$,
- $Rat_2^d = lim(Rat) \subsetneq Rat_2$ *und*
- $Rat_2^d \subseteq Rat_3^d$, $Rat_2 \subseteq Rat_3$.

Beweis: $w \in L_2(A) \iff \exists r \in run_{s_0}(w) : r$ berührt F unendlich oft $\implies \exists^\omega i : w[i] \in L_{fin}(A)$ und $w[i] < w[i+1] \iff w \in lim(L_{fin}(A))$. Ist A determiniert, dann besteht $Run_{s_0}(w)$ aus genau einem *run*, also gilt auch die Umkehrung im obigen $\implies$-Schritt. Es sei A der indeterminierte Automat aus Abbildung 2 mit $L_2(A, \{s_2\}) = \{a, b\}^* ba^\omega$.

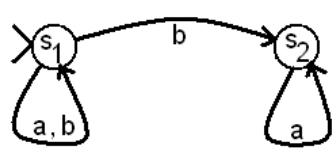

Figure 2: Ein indeterminierter (unvollständiger) Automat

Es gilt aber für jede Sprache $M \subseteq \{a, b\}^*$ laut Lemma 1.4 $\{a, b\}^* ba^\omega \neq lim(M)$.

Die letzte Aussage sieht man leicht wie folgt: Seien $A = (S, \Sigma, \Delta, s_0)$ ein Automat und $F \subseteq S$ gegeben, dann gilt mit

$$\mathcal{F} := \{T \subseteq S \mid T \cap F \neq \emptyset\}$$

sofort $\quad L_2((A,F)) = L_3((A,\mathcal{F}))$.

■

Es sei betont, dass man die Gleichung $Rat_2^d = lim(Rat) \subsetneq Rat_2$ richtig lesen muss. Sie besagt, dass für jedes Alphabet Σ $Rat_{2,\Sigma}^d = lim(Rat_\Sigma) \subseteq Rat_{2,\Sigma}$ gilt, es aber ein Alphabet Σ existiert, für das $Rat_{2,\Sigma} \subseteq lim(Rat_\Sigma)$ nicht gilt.

Lemma 2.3 *$K \in Rat_2^d \iff \exists n : \forall i \leq n : \exists$ rationale finitäre Präfixcodesprachen P_i, Q_i mit*

$$K = \bigcup_{i \leq n} P_i Q_i^\omega.$$

Beweis: Jede rationale finitäre Sprache M lässt sich darstellen als $M = \bigcup_{i\leq n} P_i Q_i^*$ mit rationalen finitären Präfixcodesprachen P_i, Q_i. Damit gilt $lim(M) = \bigcup_{i\leq n} lim(P_i Q_i^*) = \bigcup_{i\leq n} P_i lim(Q_i^*) = \bigcup_{i\leq n} P_i Q_i^\omega$.
Umgekehrt: Seien P_i, Q_i rationale finitäre Präfixcodesprachen, dann gilt $\bigcup_{i\leq n} P_i Q_i^\omega = lim(\bigcup_{i\leq n} P_i Q_i^*) \in lim(Rat)$.

■

Da die Tatsache (siehe Eilenberg [5]), dass sich jede finitäre rationale Sprache M derart als $M = \bigcup_{i\leq n} P_i Q_i^*$ mittels finitärer rationaler Präfixsprachen darstellen lässt, relativ unbekannt ist, wird Lemma 2.3 im Folgenden nicht weiter benutzt. Offensichtlich gilt das folgende

Lemma 2.4 *Für einen Büchi-Automaten $A = (S, \Sigma, \Delta, s_0, F)$ gilt*

$$L_2(A) = \bigcup_{s' \in F} L_{s_0,s'} L_{s',s'}^\omega.$$

Satz 2.2 *$Rat_2 = Reg^\omega$.*

Beweis: Das letzte Lemma impliziert sofort $Rat_2 \subseteq Reg^\omega$.
Umgekehrt: Sei $K = \bigcup_{i\leq n} M_i N_i^\omega$ mit $M_i, N_i \in Reg$. OE gelte $\varepsilon \notin N_i \cup M_i$, denn $MN^\omega = (M - \{\varepsilon\})N^\omega \cup N^\omega$ und $N^\omega = (N - \{\varepsilon\})^\omega$.
Ein indeterminierter Automat $A = (S, \Sigma, \Delta, s_0, F)$ heißt *normiert*, falls
1.) keine Kante in s_0 führt, d.h. $\forall s \in S : \forall a \in \Sigma : s_0 \notin \Delta(s,a)$, und
2.) F nur aus einem Zustand s_f besteht, aus dem keine Kante herausführt, d.h. $\forall a \in \Sigma : \Delta(s_f, a) = \emptyset$.
Offensichtlich existiert zu jeder finitären Sprache L mit $\varepsilon \notin L$ ein normierter Automat A mit $L = L_{fin}(A)$. Identifizieren wir in A nun den Finalzustand mit dem Startzustand, so folgt, dass genau L^ω 2-akzeptiert wird.
Es seien A_i ein normierter Automat, der M_i akzeptiert und B_i ein normierter Automat, der N_i akzeptiert. $C_i := A_i B_i$ sei der Automat bestehend aus den Automaten A_i, B_i, wobei

der Finalzustand von A_i mit dem Start- und mit dem Finalzustand von B_i identifiziert wurde. Dann gilt offensichtlich

$$L_2(C_i) = M_i N_i^\omega,$$

also ist $M_i N_i^\omega$ in Rat_2 und damit auch K.

■

Satz 2.3 *$Rat_3 \subseteq Reg^\omega$.*

Beweis: Es sei $A = (S, \Sigma, \Delta, s_0, \mathcal{F})$ mit $\mathcal{F} = \{S\}$ und $S = \{s_0, s_1, ..., s_n\}$ ein 1-dimensionaler Muller-Automat. Dann gilt

$$L_3(A) = (L_{s_0,s_1} \circ L_{s_1,s_2} \circ ... \circ L_{s_i,s_{i+1}} \circ ... \circ L_{s_n,s_0})^\omega,$$

also $L_3(A) \in Reg^\omega$.
Sei nun L aus Rat_3, so existieren ein Automat $A = (S, \Sigma, \Delta, s_0)$, ein k aus $\mathbb{N}_+$ und Mengen $D_i \subseteq S$ für $1 \leq i \leq k$ mit

$$L = L_3(A, \{D_1, ..., D_k\}).$$

Für $w \in L$ existiert damit ein run r in A mit Beschriftung w und $Inf(r) = D_i$ für ein $i \leq k$. Ab einer bestimmten Stelle bewegt sich dieser run damit ausschließlich in D_i und berührt jeden Zustand in D_i unendlich oft. Wir können also zu A einen neuen Automaten $\hat{A}_i$ hinzufügen, der A eingeschränkt auf die Zustände in D_i ist, in den man ab irgendeiner Stelle im run hinein springt und ihn nicht mehr verlässt. Formal:
Für $1 \leq i \leq k, s \in D_i$ sei $A_{i,s}$ der von D_i generierte Teilautomat von A mit s als Startzustand, also

$$A_{i,s} = (D_i, \Sigma, \Delta \cap (D_i \times \Sigma \times D_i), s\}.$$

$\hat{A}_{i,s}$ ist eine Kopie von $A_{i,s}$, in der alle vorkommenden Zustände s in $\hat{s}_i$ umbenannt sind, $\hat{D}_i = \{\hat{s}_i \mid s \in D_i\}$. $\hat{A}_i$ sei $\hat{A}_{i,\hat{s}_i}$ für irgendein $s_i \in D_i$, d.h. der Startzustand ist irrelevant. A' entstehe aus A durch Hinzufügen je einer Kopie $\hat{A}_i$, für i, $1 \leq i \leq k$, und für jeden Zustand $s \in D_i$ wird s in A mit $\hat{s}_i$ in der Kopie $\hat{A}_i$ über eine ε-Kante verbunden. $A^\mathcal{F}$ entstehe aus A' durch die Standardtechnik zur Elimination aller ε-Kanten, für $\mathcal{F} = \{D_1, ..., D_k\}$. $A^\mathcal{F}$ heißt auch die *$\mathcal{F}$-Vervollständigung* von A.
Es sei $\hat{\mathcal{F}} := \{\hat{D}_1, ..., \hat{D}_k\}$, dann gilt

$$L = L_3((A, \mathcal{F})) = L_3((A^\mathcal{F}, \hat{\mathcal{F}})) = \bigcup_{1 \leq i \leq k, s \in D_i} L_{s_0,s} \circ L_3((\hat{A}_{i,\hat{s}_i}, \{\hat{D}_i\})),$$

wobei $(\hat{A}_{i,\hat{s}_i}, \{\hat{D}_i\})$ spezielle 1-dimensionale Muller-Automaten sind, deren L_3-Sprachen nach unserer Anfangsüberlegung in Reg^ω liegen. Also $L \in Reg^\omega$.

■

Wichtig in dieser Konstruktion ist, dass kein Teilautomat $\hat{A}_i$ jemals wieder verlassen werden kann. D.h., wird einmal ein Zustand aus $\hat{D}_i$ erreicht, können nur noch Zustände aus $\hat{D}_i$ durchlaufen werden. Leider führt diese Konstruktion wegen der Elimination der ε-Kanten i.A. von einem determinierten Automaten zu einem indeterminierten.

Satz 2.4 (Komposition Rat_3^d) *Für $M \in Reg, L \in Rat_3^d$ gilt $ML \in Rat_3^d$.*

Beweis: Es seien $A_i = (S_i, \Sigma, \delta_i, s_i)$ zwei determinierte Automaten und es gelte

$$M = L_{fin}((A_1, F_1)),\ L = L_3((A_2, \mathcal{F}_2)),$$

für $F_1, \mathcal{F}_2$ geeignet. Gesucht ist ein determinierter Muller-Automat, B, der ein Wort w genau dann akzeptiert, falls $w = uv$ ist für geeignete $u \in M, v \in L$. Dazu arbeitet B zuerst den eindeutigen run $s_1 w$ solange ab, bis er einen Zustand $s \in F_1$ erreicht. Jetzt kann B weiter in A_1 arbeiten (falls u noch nicht komplett abgearbeitet ist) oder in den Startzustand von A_2 wechseln, um v zu erkennen. An welcher Stelle im run und in welchem Finalzustand aus F_1 von A_1 dieser Wechsel nach A_2 stattfinden muss, ist aber a priori nicht bekannt. Daher muss B bei Erreichen eines finalen Zustandes aus F_1 parallel in A_1 und A_2 weiterarbeiten. Die bekannte Parallelkonstruktion $A_1 \,\|\, A_2$ reicht aber nicht aus, da in einem Zustand $(s, q) \in S_1 \times S_2$ im Fall von $s \in F_1$ B wieder die Rechnung ab s splitten muss (weiter in A_1 mit s und parallel dazu weiter in A_2 von s_2 aus) und noch die schon existierende Parallelrechnung in A_2 bei q weiterführen muss. Dazu werden Zustände aus $S_1 \times S_2^n$ benötigt. Wie kann man n beschränken? Erreicht B einen Zustand

$$(s, q_1, ..., q_n) \text{ mit } q_i = q_j \text{ für ein } i \neq j, 1 \leq i, j \leq n,$$

so muss nur eine dieser beide Rechnungen in A_2 von q_i, Q_j aus fortgeführt werden. Also definiert man B formal als

$$B = (S, \Sigma, \Delta, s_0, \mathcal{F}) \text{ mit}$$

$$S := S_1 \times T_2^n \text{ mit } n := |S_2| + 2 \text{ und } T_2 := S_2 \cup \{0\},$$

$$s_0 := (s_1, 0, ..., 0),$$

$$\mathcal{F}_2 := S_1 \times \bigcup_{1 \leq i \leq n+2} (T_2^{i-1} \times \mathcal{F}_2 \times T_2^{n+2-i}),$$

für einen neuen (Ruhe-)Zustand 0 (in dem A_2 nicht arbeiten soll) mit $0 \notin S_2$. Dazu erweitern wir δ_2 auf $T_2 \times \Sigma$ durch

$$\delta_2(0, a) := \{0\}$$

und definieren

$$\Delta((s, q_1, ..., q_{n+2}), a) \text{ als}$$

$$(\delta_1(s, a), \delta_2'(q_1, a), ..., \delta_2'(q_{n+2}, a)),$$

für $s \notin F_1$ mit $\delta_2'(q_j, a) := 0$, falls ein $i < j$ existiert mit $q_j = q_i$, und $\delta_2'(q_j, a) := \delta_2(q_j, a)$ sonst, und als

$$(\delta_1(s, a), \delta_2''(q_1, a), ..., \delta_2''(q_{n+2}, a)),$$

für $s \in F_1$ mit $\delta_2''(q_j, a) := \delta_2(s_2, a)$, falls $q_j = 0$ und $\forall i < j : q_i \neq 0$ gilt, und $\delta_2''(q_j, a) := \delta_2(q_j, a)$ sonst.

Es sei $r = (s_1, 0, ..., 0)w$ mit $w \in \Sigma^\omega$ ein run in B. Die Zustandsfolge $\sigma(r)$ von r ist ein Wort in $(S_1 \times T_2^n)^\omega$, dessen i+1-te Projektion wir als *i-te Spur* von r bezeichnen. Damit gilt dass die Rechnung auf Spur j in den Ruhezustand 0 gelangt, falls auf Spur j ein Zustand erreicht wird, der auch gerade auf Spur i für ein $i < j$ angenommen wird. Die Rechnung wird ja auch auf Spur i fortgesetzt und damit kann Spur j freigegeben werden. Bei $|S_2| + 2$ Spuren ist damit stets auf mindestens einer Spur ein Ruhezustand vorhanden. Erreicht r auf Spur 0, auf der die Arbeit von A_1 simuliert wird, einen Finalzustand, so wird auf der ersten freien Spur eine neue Rechnung von A_2 vom Startzustand s_2 aus gestartet. Wird eine Spur unendlich oft freigegeben und wieder neu benutzt, so liegt 0 in der Menge der auf dieser Spur unendlich oft angenommenen Zustände. Da 0 in $\mathcal{F}_2$ nicht vorkommt, trägt diese Spur nichts zur 3-Akzeptanz bei. Damit gilt.

$w \in ML \iff$
$\exists u \in M : \exists v \in L : w = uv \iff$
$\exists s \in F_1 : \exists n$: der run $s_1 w[n]$ in A_1 endet in F_1 und für den run $r' := s_2 w(n+1) w(n+2)...$ gilt $Inf(r') \in \mathcal{F}_2 \iff$
für den einzigen run $r = (s_1, 0..., 0)w$ in B gilt: $\exists$ Spur $i : Inf(r_i) \in \mathcal{F}_2 \iff$
$Inf((s_1, 0, ..., 0)w) \in \mathcal{F}_3 \iff w \in L_3(B)$.

■

2.3 Der Hauptsatz von Büchi-McNaughton

Wir benötigen nur noch einen Schritt, um den Hauptsatz von Büchi-McNaughton über ω-reguläre Sprachen zeigen zu können.

Satz 2.5 (Choueka) $\forall M \in Reg : \exists N \in Reg : M^\omega = M^* lim(N)$.

Beweis: Wir folgen hier Choueka [6] mir einer Vereinfachung (f-Ramsey-Zerlegung) nach Perrin und Pin [7].
Es seien $A = (S, \Sigma, \delta, s_0)$ ein determinierter Automat und $F \subseteq S$ mit $M = L_{fin}((A, F))$. Definiere N als

$$x \in N :\iff \exists u \in \Sigma^* : \exists z \in \Sigma^+ \text{ mit}$$

$$1.)\ x = uz,\ 2.)\ u \in M^*,\ 3.)\ \delta^*(s_0, x) = \delta^*(s_0, z) \text{ und } 4.) \forall z' < z : \delta^*(s_0, x) \neq \delta^*(s_0, z').$$

Wegen

$$N = \bigcup_{s\in S}((L_{s_0,s} \cap M^*)(\bigcup_{s'\in S}(L_{s,s'} \cap L_{s_0,s'} \cap \Sigma^+) - \bigcup_{s''\in S}(L_{s,s''} \cap L_{s_0,s''} \cap \Sigma^+)\Sigma^+))$$

ist N regulär. Nun gilt $M^\omega = M^* lim(N)$, denn:

"$\supseteq$": Wir zeigen $lim(N) \subseteq M^\omega$:
$w \in lim(N)$
$\Longrightarrow$ $\forall i : \exists x_i, u_i, z_i$, die 1.) bis 4.) erfüllen, mit $x_i < x_{i+1}$ und $w = lim^{\rightarrow} x_i$
$\Longrightarrow$ $u_k \neq u_l$ für $k \neq l$ (denn für $u_k = u_l$ mit $k < l$ folgt $x_k = u_k z_k < x_l = u_l z_l = u_k z_l$, d.h. $z_k < z_l$ widerspricht 4.))
$\Longrightarrow$ $w = lim^{\rightarrow} u_i z_i$ mit $u_i \neq u_j$ $\forall i, j$ mit $i \neq j$
$\Longrightarrow$ $\exists$ Teilfolge der $u_i z_i$ mit $w = lim^{\rightarrow} u_i z_i$ und $\forall i : u_i < u_{i+1}$
$\Longrightarrow$ $\exists$ weitere Teilfoge der $u_i z_i$ davon mit $w = lim^{\rightarrow} u_i z_i$ mit $\forall i : u_i < x_i < u_{i+1}$
$\Longrightarrow$ $\exists r_i : u_{i+1} = x_i r_i \implies x_{i+1} = u_{i+1} z_{i+1} = x_i r_i z_{i+1}$.
Aus $\delta^*(s_0, z_i r_i) = \delta^*(\delta^*(s_0, z_i), r_i)) = \delta^*(\delta^*(s_0, x_i), r_i)) = \delta^*(s_0, x_i r_i) = \delta^*(s_0, u_{i+1}) \in F$ (wegen $u_{i+1} \in M^*$), folgt

$$y_i := z_i r_i \in M^+, \text{ d.h.}$$

$$x_{i+1} = x_i y_i \text{ mit } x_i \in M^*, y_i \in M^+, \text{ also } x_{i+1} = u_1 y_1 ... y_i, \text{ und somit}$$

$$w = lim^{\rightarrow} x_{i+1} = lim^{\rightarrow} u_1 y_2 ... y_i \in (M^+)^\omega = M^\omega.$$

"$\subseteq$": Sei $w \in M^\omega$, so existiert eine Zerlegung $w = w_1 w_2 ... w_i ...$ mit w_i aus M^+.

$$f : \Sigma^+ \rightarrow S$$

sei definiert durch

$$f(u) := \delta^*(s_0, u),$$

so existiert eine f-Ramsey-Zerlegung $\{i_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ mit

$$w = (w_{i_0} ... w_{i_1 - 1})(w_{i_1} ... w_{i_2 - 1}) ... (w_{i_j} ... w_{i_{j+1} - 1}) ...$$

und es existiert ein $s \in S$ mit

$$\delta^*(s_0, w_{i_j} ... w_{i_{j+1} - 1}) = s \text{ für alle } j > 0.$$

Insbesondere gilt

$$w = w_{i_0} ... w_{i_1 - 1} \circ lim^{\rightarrow} v_j$$

mit

$$v_j := w_{i_1} ... w_{i_j - 1}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $v := lim^{\rightarrow} v_j$ in $lim(N)$ liegt.
Zu jedem j sei r_j die kleinste Zahl r mit

$$i_j < r \leq i_{j+1} \text{ und } \delta^*(s_0, w_{i_1}...w_r) = s.$$

Damit definieren wir

$$x_j := w_{i_1}...w_r,$$

$$u_j := v_j \text{ und } z_j := w_{i_j}...w_r.$$

Diese Tripel

$$x_j, u_j, z_j$$

erfüllen für jedes j die Bedingungen 1.) bis 4.). Also liegt x_j in N und

$$v = lim^{\rightarrow} v_j = lim^{\rightarrow} x_j \in lim(N).$$

■

Definition 2.8 (Klassische Abschlüsse) *Es seien $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}_i$ für $i = 1, 2$ eine Menge von Sprachen, dann sind*

$$Cl^{\cup}(\mathcal{L})$$

der Abschluss von $\mathcal{L}$ unter Vereinigung *und*

$$Cl^{bool}(\mathcal{L})$$

der boolesche Abschluss, *d.h. der Abschluss unter Vereinigung, Durchschnitt und Komplement, und*

$$\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 := \mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2 := \bigcup\{L_1L_2 \mid L_i \in \mathcal{L}_i\},$$

$$lim(\mathcal{L}) := \bigcup\{lim(L) \mid L \in \mathcal{L}\} \text{ und}$$

$$(\mathcal{L})^\omega := \bigcup\{L^\omega \mid L \in \mathcal{L})\}.$$

Vorsicht: Mit diesen Bezeichnungen ist Reg^ω, die Klasse aller regulären infinitären Sprachen, etwas anderes als $(Reg)^\omega$, die unendliche Konkatenation von regulären finitären Sprachen. In der Tat gilt $(Reg)^\omega \neq Reg^\omega$, denn $\{a,b\}^*ab^\omega \in Reg^\omega$, aber $\{a,b\}^*ab^\omega \neq M^\omega$ für jede finitäre Sprache $M \in \{a,b\}^*$. Denn $\{a,b\}^*ab^\omega = M^\omega \implies \exists w \in M : w$ enthält ein a $\implies w^\omega \in M^\omega$ enthält unendlich viele a und liegt daher nicht in $\{a,b\}^*ab^\omega$.

Wir haben nun alle Resultate zusammen, um den sogenannten Hauptsatz von Büchi [3] und McNaughton [8] über infinitäre reguläre Sprachen zu formulieren und zu beweisen.

Satz 2.6 Hauptsatz von Büchi-McNaughton *Die folgenden Klassen von Sprachen sind gleich:*

- Reg^ω
- $Cl^{bool}(Reg^\omega)$
- Rat_2
- Rat_3
- Rat_3^d
- $Cl^{bool}(Rat_2^d)$
- $Cl^{bool}(lim(Reg))$
- $Cl^\cup(Reg \circ (Reg)^\omega)$
- $Cl^\cup(Reg \circ lim(Reg))$

Beweis:
$K \in Reg^\omega$
$\Longrightarrow_{Def} \exists n : \exists M_i, N_i \in Reg : K = \bigcup_{i \leq n} M_i N_i^\omega \in Cl^\cup(Reg \circ (Reg)^\omega)$
$\Longrightarrow_{S.2.5} \exists n : \exists M_i, N_i \in Reg : K = \bigcup_{i \leq n} M_i \circ lim(N_i) \in Cl^\cup(Reg \circ lim(Reg))$
$\Longrightarrow_{L.2.2, S.2.1, S.2.4} K \in Rat_3^d$
$\Longrightarrow_{Def} K \in Rat_3$
$\Longrightarrow_{S.2.3} K \in Rat^\omega$
$\Longleftrightarrow_{S.2.2} K \in Rat_2$.

Mit Satz 2.4 sind diese Klassen gegen Boole'sche Operationen abgeschlossen.
Weiter gilt: $Rat_2^d = lim(Reg)$ nach Lemma 2.2 und
$L \in Reg \implies_{L.2.2} lim(L) \in Rat_2^d \subseteq_{L.2.2} Rat_3^d$, d.h.

$$Cl^{bool}(lim(Reg)) \subseteq Cl^{bool}(Rat_3^d) =_{S.2.4} Rat_3^d.$$

Umgekehrt: Sei $L \in Rat_3^d$, so existiert ein determinierter Automat $A = (S, \Sigma, \delta, s_0)$ und ein $\mathcal{F} = \{D_1, ..., D_k\}$ mit $D_i \subseteq S$ und $L = L_3((A, \mathcal{F}))$. Da A determiniert ist, stimmen Wörter mit runs überein, und man sieht sofort:

$$L_3((A, \mathcal{F})) = \bigcup_{D \in \mathcal{F}} L_3((A, \{D\})) = \bigcup_{D \in \mathcal{F}} ((\bigcap_{s \in D} L_2((A, \{s\})) - L_2((A, S - D)))$$

$$\in Cl^{bool}(Rat_2^d) =_{S.2.2} Cl^{bool}(lim(Reg)).$$

■

Da Rat_2^d nach Satz 2.1 gegen Vereinigung und Durchschnitt, mit dem Lemma 2.2 und dem Hauptsatz aber echt in $Rat_2 = Cl^{bool}(Rat_2^d)$ enthalten ist, folgt sofort

Korollar 2.1 *Rat_2^d ist nicht gegen Komplement abgeschlossen.*

Wir können dies aber auch über ein Beispiel direkt sehen:

$$L := ((a+b)^*b)^\omega = L_2((A, \{s_1\}) \in Rat_2^d$$

für den determinierten Büchi-Automaten A aus Abbildung 1. Damit gilt nach Satz 2.1 auch

$$L' := a^\omega \cup L \in Rat_2^d.$$

Für ihr Komplement gilt aber nach Lemma 1.4

$$(a+b)^\omega - L' = (a+b)^*ba^\omega \notin lim(Reg) = Rat_2^d.$$

3 Algebraische Theorie von ω-regulären Sprachen

3.1 Kongruenzen auf finitären Sprachen

Wir wiederholen hier einige Grundbegriffe der algebraischen Automatentheorie finitärer Sprachen. Im nächsten Paragraphen werden diese Begriffe dann auf infinitäre Sprachen übertragen.

Definition 3.1 (Kongruenz, saturieren) *Eine Äquivalenzrelation $\tau \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$* saturiert *eine finitäre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ wenn L die Vereinigung von Äquivalenzklassen von τ ist, d.h. es eine Teilmenge $M \subseteq \Sigma^*$ gibt mit*

$$L = \bigcup_{w \in M} [w]_\tau.$$

Eine Rechts-Kongruenz *τ über Σ^* ist eine Äquivalenzrelation mit $\forall u, v, w \in \Sigma^*$:*

$$u \, \tau \, v \implies (uw) \, \tau \, (vw).$$

Eine Kongruenz *ist eine Rechts-Kongruenz für die zusätzlich gilt: $\forall u, v, w \in \Sigma^*$:*

$$u \, \tau \, v \implies (wu) \, \tau \, (wv).$$

Der Index *einer Äquivalenzrelation ist die Anzahl der verschiedenen Äquivalenzklassen dieser Relation. Eine Äquivalenzrelation τ heißt* gröber *als eine Äquivalenzrelation ρ, falls die ρ-Äquivalenzklassen stets in τ-Äquivalenzklassen enthalten sind, d.h. falls für alle $u, v \in \Sigma^*$ gilt*

$$u \, \rho \, v \implies u \, \tau \, v.$$

Korollar 3.1 *Für jede Äquivalenzrelation τ gilt offensichtlich*

- *τ saturiert eine Sprache L genau dann, wenn für alle $u, v \in \Sigma^*$ gilt*

$$u \, \tau \, v \implies (u \in L \Leftrightarrow v \in L),$$

- *τ saturiert $L \iff \tau$ saturiert $\Sigma^* - L$,*
- *τ gröber als $\rho \implies Index(\tau) \leq Index(\rho)$.*

Korollar 3.2 *Für jede Kongruenz τ und Wörter $u, v, x, y \in \Sigma^*$ gilt*

- *$u \, \tau \, v \wedge x \, \tau \, y \implies ux \, \tau \, vy$,*
- *$[u]_\tau [v]_\tau \subseteq [uv]_\tau$.*

Beweis. 1.: $u \,\tau\, v \wedge x \,\tau\, y \implies ux \,\tau\, vx \,\tau\, vy \implies ux \,\tau\, vy$.
2.:$w \in [u]_\tau[v]_\tau \implies \exists w_1 \in [u]_\tau, w_2 \in [v]_\tau : w = w_1w_2 \implies w_1 \,\tau\, u \wedge w_2 \,\tau\, v \implies w_1w_2 \,\tau\, uv \implies w = w_1w_2 \in [uv]_\tau$.

■

Definition 3.2 ($\sim_L$-Kongruenz) *Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist*

$$\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$$

definiert durch $\forall u, v \in \Sigma^*$:

$$u \sim_L v \;:\Longleftrightarrow\; \forall w \in \Sigma^* : (uw \in L \Leftrightarrow vw \in L).$$

Korollar 3.3 *Für $L \subseteq \Sigma^*$ gilt stets*

- *$\sim_L$ ist eine Rechts-Kongruenz, die L saturiert,*
- *von allen Rechts-Konkruenzen, die L saturieren, ist $\sim_L$ die gröbste.*

Beweis. Offensichtlich ist $\sim_L$ eine Rechts-Kongruenz. Aus $u \sim_L v$ folgt sofort $u = u\varepsilon \in L \Leftrightarrow v\varepsilon = v \in L$. Also saturiert $\sim_L$ auch L. Für eine Rechts-Kongruenz ρ, die L saturiert, gilt für alle u, v, w: $u \,\rho\, v \implies uw \,\rho\, vw \implies (uw \in L \Leftrightarrow vw \in L) \implies u \sim_L v$. Also ist $\sim_L$ gröber als ρ.

■

Definition 3.3 (Monoidhomomorphismus) *Es seien $(M_i, \circ_i, 1_i), 1 \leq i \leq 2$, zwei Monoide. Ein* Monoidhomomorphismus *h von M_1 nach M_2 ist eine Abbildung*

$$h : M_1 \to M_2 \text{ mit}$$

$$h(1_1) = 1_2, \text{ und } \forall a, b \in M_1 :$$

$$h(a \circ_1 b) = h(a) \circ_2 h(b).$$

Der folgende Satz ist zentral in der algebraischen Automatentheorie.

Satz 3.1 (Algebraische Charakterisierung von *Reg*) *Folgende Aussagen sind für eine Sprache L über Σ äquivalent:*

1. *L ist rational,*
2. *$\exists$ endliches Monoid $(M, \circ, 1) : \exists B \subseteq M : \exists h : \Sigma^* \to M$ Monoidhomomorphismus mit*
$$L = h^{-1}(B),$$
3. *$\exists$ Kongruenz mit endlichem Index, die L saturiert,*

4. $\exists$ Rechts-Kongruenz mit endlichem Index, die L saturiert,

5. $\sim_L$ hat endlichen Index.

Man nennt eine Sprache, die Aussage 2) oder 4) erfüllt, häufig auch *rational* oder *erkennbar*.
Beweis.
1) $\Rightarrow$ 2): Sei L rational, so existiert ein endlicher Automat $A = (S, \Sigma, \delta, s_0, F)$, der L akzeptiert. Wir setzen

$$M := S^S,$$
$$\circ : S^S \times S^S \to S^S \text{ definiert als } (f \circ g)(q) := g(f(q)),$$
$$1 := id_S, B := \{f : S \to S \mid f(s_0) \in F\},$$
$$h : \Sigma^* \to S^S \text{ definiert als } h(w)(q) := \delta^*(q, w).$$

Damit ist $(S^S, \circ, id)$ ein endliches Monoid und h ist ein Monoidhomomorphismus wegen

$$h(uv) = \lambda q.\delta^*(q, uv) = \lambda q.\delta^*(\delta^*(q, u), v) = \lambda q.h(v)(h(u)(q)) = h(u) \circ h(v) \text{ und}$$

$$h(\varepsilon) = \lambda q.\delta^*(q, \varepsilon) = id_S.$$

Ferner gilt

$$h^{-1}(B) = \{w \in \Sigma^* \mid h(w)(s_0) \in F\} = \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(s_0, w) \in F\} = L(A) = L.$$

2) $\Rightarrow$ 3): Seien $(M, \circ, 1), B, h$ gegeben wie in Aussage 2). Konstruiere

$$\tau \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^* \text{ als } u\,\tau\,v :\Longleftrightarrow h(u) = h(v).$$

τ ist eine Äquivalenzrelation von endlichem Index (da es höchstend $|M|$ viele Äquivalenzklassen geben kann) und wegen

$$\begin{aligned} u\,\tau\,v &\Rightarrow h(u) = h(v) \\ &\Rightarrow h(w_1 u w_2) = h(w_1) \circ h(u) \circ h(w_2) = h(w_1) \circ h(v) \circ h(w_2) = h(w_1 v w_2) \\ &\Rightarrow (w_1 u w_2)\,\tau\,(w_1 v w_2) \end{aligned}$$

für beliebige w_1, w_2 auch eine Kongruenz. τ saturiert L wegen

$$u\,\tau\,v \wedge u \in L(= h^{-1}(B)) \implies h(u) = h(v) \wedge h(u) \in B \implies h(v) \in B \implies v \in l.$$

3) $\Rightarrow$ 4) per Definition.
4) $\Rightarrow$ 5): $\sim_L$ ist die gröbste alle Rechts-Konkruenzen, die L saturieren, und hat damit von allen diesen Rechts-Konkruenzen den kleinsten Index.
5) $\Rightarrow$ 1): Wir konstruieren aus $\sim_L$ einen endlichen Automaten $A = (S, \Sigma, \delta, s_0, F)$ wie folgt

$$S := \{[w]_{\sim_L} \mid w \in \Sigma^*\},\ F := \{[w]_{\sim_L} \mid w \in L\},\ s_0 := [\varepsilon]_{\sim_L},\ \delta([w]_{\sim_L}, a) := [wa]_{\sim_L}.$$

δ ist unabhängig vom Repräsentanten wegen

$$[w_1]_{\sim_L} = [w_2]_{\sim_L} \implies w_1 \sim_L w_2 \implies (w_1 a) \sim_L (w_2 a),$$

A ist endlich, da $\sim_L$ endlichen Index hat, und es ist $[w]_{\sim_L} \in F \iff w \in L$. Mittels Induktion über Σ^* sieht man sofort

$$\delta^*([w]_{\sim_L}, u) = [wu]_{\sim_L}.$$

Damit gilt

$$L_{fin}(A) = \{u \in \Sigma^* \mid \delta^*(s_0, u) \in F\} = \{u \in \Sigma^* \mid [\varepsilon u]_{\sim_L} \in F\} = \{u \in \Sigma^* \mid u \in L\} = L.$$

■

Beispiel 3.1 *Für einen determinierten oder indeterminierten Automaten* $A = (S, \Sigma, \Delta, s_0, F)$ *definieren wir eine Relation* $\approx_A \subseteq (\Sigma^*)^2$ *durch* $\forall u, v \in \Sigma^*$*:*

$$u \approx_A v :\iff \forall s \in S : \Delta_A^*(s, u) = \Delta_A^*(s, v).$$

Damit ist $\approx_A$ *eine Kongruenz von endlichem Index, die* $L_{fin}(A)$ *saturiert.*

□

3.2 Kongruenzen auf infinitären Sprachen

Definition 3.4 (periodisch) *Ein Wort* $w \in \Sigma^\omega$ *heißt* schließlich periodisch *wenn Wörter* $u, v \in \Sigma^*$ *existieren mit* $w = uv^\omega$*.*

Korollar 3.4 *Jede nicht leere Sprache in* Reg^ω *besitzt mindestens ein schließlich periodisches Wort.*

Beweis: Trivial: Sei $w \in L \in Reg^\omega$ und sei $A = (S, \Sigma, \delta, s_0, \mathcal{F})$ ein determinierten Muller-Automaten mit $L = L_3(A)$. Insbesondere existiert der 3-akzeptierte run $r = s_0 w$ mit $Inf(r) \in \mathcal{F}$. Dann existieren ein $s \in S$, $u, v \in \Sigma^*$ und $x \in \Sigma^\omega$ mit $s_0 w = s_o usvsz$ und mit $Zu(sv) = Inf(s_0 w)$. Damit liegt auch uv^ω in $L_2(A)$.

■

Beispiel 3.2 *Es sei* $L_0 := \{babaaba^3 ... ba^i ba^{i+1} ...\}$*, so ist* L_0 *nicht* ω*-regulär, da* L_0 *kein schließlich periodischer Wort besitzt. Sei* L *eine* ω*-reguläre Sprache, dann ist auch* $L \cup L_0$ *nicht* ω*-regulär, da sonst wegen* $L_0 = (L \cup L_0) - L)$ *und dem Abschluss von* Reg^ω *unter allen Boole'schen Operation auch wieder* L_0 ω*-regulär sein müsste.*

□

Folgendes technische Lemma ist hilfreich und zeigt typische Argumentationen für infinitäre Wörter.

Lemma 3.1 *Es seien* $L \subseteq Reg^{\omega}_{\Sigma}$, $\tau \subseteq (\Sigma^*)^2$ *eine Kongruenz mit endlichem Index und* $u, v \in \Sigma^*$ *mit* $[u]_\tau[v]^\omega_\tau \cap L \neq \emptyset$. *Dann existieren Wörter* $x, y \in \Sigma^*$ *mit*

$$[u]_\tau[v]^\omega_\tau \subseteq [x]_\tau[y]^\omega_\tau \text{ und } xy^\omega \in L.$$

Beweis: Für $X := [u]_\tau[v]^\omega_\tau \cap L$ sei $X \neq \emptyset$. Mit Satz 3.1 sind für jede Kongruenz mit endlichem Index $[u]_\tau, [v]_\tau$ ω-regulär, damit auch $[u]_\tau[v]^\omega_\tau$. Als Durchschnitt zweier ω-regulärer Sprachen ist X selbst ω-regulär. Damit besitzt X ein schließlich periodisches Wort

$$st^\omega \in X = L \cap [u]_\tau[v]^\omega_\tau.$$

Damit gilt $\forall i : \exists j_i > i : \exists t'_i, t''_i \in \Sigma^*$ mit

- $st^\omega = (st^{j_1}t'_1)(t''_1 t^{j_2} t'_2)...(t''_i t^{j_{i+1}} t'_{i+1})... = w_0 w_1 w_2 ... w_i ...$ mit
- $w_0 = st^{j_1}t'_1 \in [u]_\tau[v]^+_\tau$,
- $w_i = t''_i t^{j_{i+1}} t'_{i+1} \in [v]^{+\,\prime}_\tau$.
- $t = t'_i t''_i$, und damit auch
- $w_o ... w_i \in [u]_\tau[v]^+_\tau$.

Es existieren k, l mit $t'_k = t'_{k+l}$ und n, m mit

- $x := w_0 ... w_k \in [u]_\tau[v]^n_\tau$ und
- $y := w_{k+1} ... w_{k+l} \in [v]^m_\tau$.

Also gilt:

- $xy^\omega = st^\omega \in L$ mit
- $x \in [u]_\tau[v]^n_\tau \subseteq [uv^n]_\tau$, also $[x]_\tau = [uv^n]_\tau$, und
- $y \in [v]^m_\tau \subseteq [v^m]_\tau$, also $[y]_\tau = [v^m]_\tau$, also
- $[u]_\tau[v]^\omega_\tau \subseteq [uv^n]_\tau[v^m]^\omega_\tau = [x]_\tau[y]^\omega_\tau$.

■

Definition 3.5 (saturieren) *Eine Kongruenz* $\tau \subseteq (\Sigma^*)^2$ saturiert *eine infinitäre Sprache* $L \subseteq \Sigma^\omega$ *genau dann wenn für alle Wörter* $u, v \in \Sigma^*$ *gilt:*

$$[u]_\tau[v]^\omega_\tau \cap L \neq \emptyset \implies [u]_\tau[v]^\omega_\tau \subseteq L. \tag{1}$$

Korollar 3.5 *Für eine Kongruenz $\tau \subseteq (\Sigma^*)^2$ und eine infinitäre Sprache $L \subseteq \Sigma^\omega$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *τ saturiert L,*
2. *$\forall u, v \in \Sigma^* : ([u]_\tau [v]_\tau^\omega \subseteq L$ oder $[u]_\tau [v]_\tau^\omega \subseteq \Sigma^\omega - L)$,*
3. *τ saturiert $\Sigma^\omega - L$,*

Besitzt τ zusätzlich einen endlichen Index, sind dazu ebenfalls äquivalent

4. *$\forall u, v \in \Sigma^*$: $(uv^\omega \in L \implies [u]_\tau [v]_\tau^\omega \subseteq L)$,*
5. *$\forall u, v \in \Sigma^*$: $(uv^\omega \in L \iff [u]_\tau [v]_\tau^\omega \subseteq L)$.*

Beweis: Aus der Definition folgt sofort 1.) $\iff$ 2.) $\iff$ 3.).
1.) $\implies$ 4.): Gilt $uv^\omega \in L$, so gilt wegen $uv^\omega \in [u]_\tau [v]_\tau^\omega$ auch $[u]_\tau [v]_\tau^\omega \cap L \neq \emptyset$ und damit, da τ L saturiert, auch $[u]_\tau [v]_\tau^\omega \subseteq L$.
4.) $\implies$ 5.): Gilt $[u]_\tau [v]_\tau^\omega \subseteq L$, so gilt auch $uv^\omega \in L$.
5.) $\implies$ 1.): Seien $u, v \in \Sigma^*$ mit $[u]_\tau [v]_\tau^\omega \cap L \neq \emptyset$, so finden wir nach Lemma 3.1 Wörter x, y mit $[u]_\tau [v]_\tau^\omega \subseteq [x]_\tau [y]_\tau^\omega$ und mit $xy^\omega \in L$. Insbesondere gilt mit 3.) auch $[u]_\tau [v]_\tau^\omega \subseteq [x]_\tau [y]_\tau^\omega \subseteq L$.

■

Der folgende Begriff "überdecken" ist eng mit "saturieren" verwandt.

Definition 3.6 (überdecken) *Eine Kongruenz $\tau \subseteq (\Sigma^*)^2$* überdeckt *eine infinitäre Sprache $L \subseteq \Sigma^\omega$ genau dann wenn gilt*

$$L = \bigcup \{[u]_\tau [v]_\tau^\omega \mid u, v \in \Sigma^* \text{ und } uv^\omega \in L\}.$$

Lemma 3.2 *Es seien $\tau \subseteq (\Sigma^*)^2$ eine Kongruenz mit endlichem Index und $L \subseteq \Sigma^\omega$, so gilt:*

1. *τ überdeckt $L \implies L \in Reg^\omega$,*
2. *τ überdeckt Σ^ω.*

Beweis. 1.) Es sei

$$L = \bigcup \{[u]_\tau [v]_\tau^\omega \mid u, v \in \Sigma^* \text{ und } uv^\omega \in L\},$$

und τ habe endlichen Index, also

$$L = \bigcup_{i \leq n} [u_i][v_i]^\omega$$

für geeignete Wörter u_i, v_i mit $u_i v_i^\omega \in L$. Damit sind $[u_i], [v_i]$ reguläre finitäre Sprachen, also auch $L = \bigcup_{i \leq n} [u_i][v_i]^\omega$ in Reg^ω.

2.) Wir zeigen zuerst $\Sigma^\omega = \bigcup_{u,v \in \Sigma^*} [u]_\tau [v]_\tau^\omega$: $w \in \Sigma^\omega$ ist $w = w_1 w_2 ... w_i ...$ mit $w_i \in \Sigma$ eine triviale Zerlegung von w. Damit existiert hierzu nach Satz 1.2 eine f-Ramsey-Zerlegung $\{i_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ für

$$f : \Sigma^+ \to \Sigma^+/\tau \text{ mit } f(u) := [u]_\tau$$

mit

$$w = (w_{i_0} ... w_{i_1 - 1})(w_{i_1} ... w_{i_2 - 1}) ... (w_{i_j} ... w_{i_{j+1} - 1}) ...$$

und

$$f(w_{i_j} ... w_{i_{j+1} - 1}) = [v]_\tau \ \ \forall j > 0$$

für ein $v \in \Sigma^*$. Setze $u := w_{i_0} ... w_{i_1 - 1}$, dann gilt $\ w \in [u]_\tau [v]_\tau^\omega$.
Mit Lemma 3.1 gilt dann auch $\Sigma^\omega = \bigcup \{ [u]_\tau [v]_\tau^\omega \mid u, v \in \Sigma^* \text{ und } uv^\omega \in \Sigma^* \}$.

■

Lemma 3.3 *Für eine Kongruenz τ mit endlichem Index und eine infinitäre Sprache L sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *τ saturiert L,*
2. *τ überdeckt L.*

Beweis: 1.) τ saturiere L, so gilt für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$ nach Korollar 3.5

$$uv^\omega \in L \iff [u]_\tau [v]_\tau^\omega \subseteq L.$$

Da jedes infinitäre Wort nach dem Lemma 3.2 in einer Klasse $[u]_\tau [v]_\tau^\omega$ liegen muss, folgt

$$L = \bigcup \{ [u]_\tau [v]_\tau^\omega \mid [u]_\tau [v]_\tau^\omega \subseteq L \} = \bigcup \{ [u]_\tau [v]_\tau^\omega \mid uv^\omega \in L \},$$

also überdeckt τ L.
2.) τ überdecke L, und der Index von τ sei endlich. Damit ist die Vereinigung endlich und L liegt in Reg^ω. Für $[u]_\tau [v]_\tau^\omega \cap L \neq \emptyset$ ist $[u]_\tau [v]_\tau^\omega \subseteq L$ zu zeigen. Mit Lemma 3.1 finden wir $x, y \in \Sigma^*$ mit $xy^\omega \in L$ und $[u]_\tau [v]_\tau^\omega \subseteq [x]_\tau [y]_\tau^\omega$. Wegen $L = \bigcup \{ [x]_\tau [y]_\tau^\omega \mid xy^\omega \in L \}$ liegt also bereits $[u]_\tau [v]_\tau^\omega$ in L.

■

Büchi hat in [3] eine Kongruenz eingeführt, die wir Büchi-Kongruenz nennen.

Definition 3.7 (Büchi-Kongruenz) *Zu einem Büchi-Automaten $B = (S, \Sigma, \Delta, s_0, F)$ ist die* Büchi-Kongruenz $\sim_B \subseteq (\Sigma^*)^2$ *definiert als: $\forall w, w' \in \Sigma^*$:*

$$w \sim_B w' :\iff \forall s \in S : \ (\Delta(s, w) = \Delta(s, w') \textit{ und } \Delta_F(s, w) = \Delta_F(s, w')), \textit{ mit}$$

$$\Delta(s, w) := \{ s' \in S \mid \exists r \in Run_s^B(w) : r \textit{ endet in } s' \}, \textit{ und}$$

$$\Delta_F(s, w) := \{ s' \in S \mid \exists r \in Run_s^B(w) : Zu(r) \cap F \neq \emptyset \textit{ und } r \textit{ endet in } s' \}.$$

Für zwei Büchi-kongruente Wörter u, u' gilt also, dass zu jedem run r mit Beschriftung u von Zuständen s nach s' ebenfalls ein run r' mit Beschriftung u' von s nach s' gefunden werden kann, sowie zu jedem run r mit Beschriftung u von Zuständen s nach s', der F berührt, ebenfalls ein run r' mit Beschriftung u von s nach s' gefunden werden kann, der ebenfalls F berührt. Daher kann man mit einfachsten Mitteln, ohne Resultate der Theorie der ω-Automaten zu nutzen, zeigen

Lemma 3.4 *Für jeden Büchi-Automaten B ist $\sim_B$ eine Kongruenz von endlichem Index, die $L_2(B)$ saturiert.*

Beweis: Es sei $B = (S, \Sigma, \Delta, s_0, F)$. Offensichtlich ist $\sim_B$ eine Kongruenz. Für $S = \{s_1, ..., s_n\}$ ist eine Äquivalenzklasse $[w]_{\sim_B}$ durch den Vektor

$$(\Delta(s_1, w), \Delta_F(s_1, w), ..., \Delta(s_n, w), \Delta_F(s_n, w))$$

charakterisiert. Da B nicht determiniert sein muss, gilt $\Delta(s, w), \Delta_F(s, w) \in 2^S$, also $|\Delta(s, w)|, |\Delta_F(s, w)| \leq 2^n$. D.h., es kann höchstens $2n \cdot 2^n$ verschiedene Äquivalenzklassen von $\sim_B$ geben.
Seien nun $u, v \in \Sigma^*$ mit

$$[u]_{\sim_B}[v]^{\omega}_{\sim_B} \cap L_2(B) \neq \emptyset.$$

Es sei

$$x \in [u]_{\sim_B}[v]^{\omega}_{\sim_B} \cap L_2(B),$$

so existiert ein 2-akzeptierter run r in B mit Beschriftung x. Insbesondere lässt sich r wie folgt zerlegen: zu jeder Zahl i finden wir eine Zahl $j_i \geq 1$, Zustände $s_i \in S$ und runs r_i mit

- $r = r_1 r_2 ... r_i ...$,
- r_1 führt von s_0 nach s_1,
- r_i führt von s_{i-1} nach s_i für $i > 1$ und berührt einen Zustand aus F,
- $x_1 := \beta(r_1) \in [u]_{\sim_B}$,
- $x_i := \beta(r_i) \in [v]^{j_i}_{\sim_B}$ für alle $i > 1$.

Sei nun w ein beliebiges Wort aus $[u]_{\sim_B}[v]^{\omega}_{\sim_B} \cap L_2(B)$. Damit existiert eine Zerlegung

$$w = w_1 w_2 ... w_i ... \text{ mit}$$

$$w_1 \in [u]_{\sim_B} \text{ und } w_i \in [v]^{j_i}_{\sim_B} \text{ für } i > 1, \text{ d.h.}$$

$$x_i \sim_B w_i \ \ \forall i.$$

Insbesondere finden wir zu jedem run r_i von s_{i-1} nach s_i einen run r'_i ebenfalls von s_{i-1} nach s_i mit Beschriftung w_i. Berührt dabei r_i einen Zustand aus F, so auch r'_i. Damit wird

$$r' := r'_1 r'_2 ... r'_i ...$$

von B 2-akzeptiert und hat die Beschriftung w, also $w \in L_2(B)$. D.h. $\sim_B$ saturiert $L_2(B)$. ■

Insgesamt können wir folgenden Zusammenhang festhalten.

Satz 3.2 *Für jede infinitäre Sprache L sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $L \in Reg^\omega$,

2. *Es existiert eine Kongruenz von endlichem Index, die L saturiert,*

3. *es existiert eine Kongruenz von endlichem Index, die L überdeckt,*

4. *es existieren ein endliches Monoid M, ein Monoidhomomorphismus $h : \Sigma^* \to M$, $n \in \mathbb{N}$ und Elemente $a_i, b_i \in M$ für $1 \leq i \leq n$ mit*

$$L = \bigcup_{1 \leq i \leq n} h^{-1}(a_i)(h^{-1}(b_i))^\omega.$$

Beweis: 2. $\iff$ 3. $\implies$ 1.: Mit Lemma 3.3 sind die Aussagen 2. und 3. äquivalent und implizieren mit Lemma 3.2 die erste.
1. $\implies$ 2.: Ist $L \in Reg^\omega$, so existiert ein Büchi-Automat B mit $L = L_2(B)$ und $\sim_B$ erfüllt nach Lemma 3.4 die zweite Aussage.
3. $\iff$ 4.: Die vierte Aussage ist zur dritten äquivalent, da jede Kongruenz τ kanonisch das Monoid $M := \Sigma^*/\tau$ und den Monoidhomomorphis $h : \Sigma^* \to M$ mit $h(w) = [w]_\tau$ generiert, wobei für $a = [u]_\tau \in M$ natürlich $[u]_\tau = h^{-1}(a)$ gilt. Umgekehrt generiert jeder Monoidmorphismus $h : \Sigma^* \to M$ die Kongruenz τ mit $u \, \tau \, v :\Leftrightarrow h(u) = h(v)$, für die für jedes $a \in M, w \in \Sigma^*$ mit $h(w) = a$ bereits $[w]_\tau = h^{-1}(a)$ gilt. D.h., es ist egal, ob wir mit Äquivalenzklassen von Kongruenzen oder Urbildern eines Monoidhomomorphismus von Elementen eines Monoids arbeiten.

■

Definition 3.8 (Arnoldsche Kongruenz) *Für $L \subseteq \Sigma^\omega$ ist $\approx_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ die* Arnoldsche Kongruenz *oder* syntaktische Kongruenz *von L definiert durch $\forall x, y \in \Sigma^*$:*

$$x \approx_L y :\iff \forall u, v, w \in \Sigma^* : \left(\begin{array}{ll} u(vxw)^\omega \in L \Leftrightarrow u(vyw)^\omega \in L \text{ und} \\ vxwu^\omega \in L \Leftrightarrow vywu^\omega \in L \end{array} \right).$$

Offensichtlich ist $\approx_L$ eine Kongruenz. Sie wurde von Arnold [9] eingeführt.

Lemma 3.5 *Die syntaktische Kongruenz von L ist stets gröber als jede andere Kongruenz, die L saturiert.*

Beweis: Es seien L eine infinitäre Sprache, τ eine Kongruenz, die L saturiert, und $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ mit $x\,\tau\,y$. So gilt auch $vxw\,\tau\,vyw$. Also:

$$\begin{aligned} u(vxw)^\omega \in L &\Longrightarrow [u]_\tau[vxw]_\tau^\omega \subseteq L, \text{ da } \tau \ L \text{ saturiert} \\ &\Longrightarrow [u]_\tau[vyw]_\tau^\omega = [u]_\tau[vxw]_\tau^\omega \subseteq L \\ &\Longrightarrow u(vyw)^\omega \in L, \text{ und} \end{aligned}$$

$$vxw\,u^\omega \in L \Longrightarrow [vxw]_\tau[u]_\tau^\omega \subseteq L \Longrightarrow [vyw]_\tau[u]_\tau^\omega \subseteq L \Longrightarrow vyw\,u^\omega \in L.$$

Also gilt auch $x \approx_L y$.

■

Lemma 3.6 $L \in Reg^\omega \Longleftrightarrow \approx_L$ *ist von endlichem Index und saturiert L.*

Beweis: Die Rückrichtung ist klar, da L stets ω-regular ist, wenn es von irgendeiner Kongruenz mit endlichem Index saturiert wird.
"$\Longrightarrow$": Zu $L \in \Sigma^\omega$ existiert eine Kongruenz τ vom endlichen Index, die L saturiert, und mit Lemma 3.5 ist $\approx_L$ damit gröber als τ, besitzt also endlichen Index.
Zur Saturierung: Es sei zur Abkürzung $\approx := \approx_L$. Seien nun u, v Wörter in Σ^* mit $uv^\omega \in L$, so ist mit Korollar 3.5 $[u]_\approx[v]_\approx^\omega \subseteq L$ zu zeigen. Dies geschieht durch Widerspruch: Annahme $X := [u]_\approx[v]_\approx^\omega - L \neq \emptyset$. Da Reg^ω gegen Boolesche Operationen abgeschlossen ist liegt X in Reg^ω. Damit existieren $s, t \in \Sigma^*$ mit $st^\omega \in X$. Wie in Lemma 3.1 folgt die Existenz von $t_1, t_2, n_1, n_1', n_2, n_2'$ mit

- $t = t_1 t_2$,
- $st^{n_1}t_1 \in [u][v]^{n_1'}$ und
- $t_2 t^{n_2} t_1 \in [v]^{n_2'}$.

Damit existieren $u_0 \in [u]_\approx, v_i, v_j' \in [v]_\approx$ für $1 \leq i \leq n_1', 1 \leq j \leq n_2'$ mit

$$st^{n_1}t_1 = u_0 v_1 ... v_{n_1'} \text{ und } t_2 t^{n_2} t_1 = v_1' ... v_{n_2'}'.$$

Aus der Kongruenzeigenschaft von $\approx$ folgt

$$u_0 v_1 ... v_{n_1'} \approx uv^{n_1'} \text{ und } v_1' ... v_{n_2'}' \approx v^{n_2'},$$

und aus der speziellen Definition der Arnold'schen Kongruenz folgt weiter

$$\begin{aligned} (uv^\omega =) uv^{n_1'}(v^{n_2'})^\omega \in L &\Longleftrightarrow u_0 v_1 ... v_{n_1'}(v^{n_2'})^\omega \in L \\ &\Longleftrightarrow (st^\omega =) u_0 v_1 ... v_{n_1'}(v_1' ... v_{n_2'}')^\omega \in L, \end{aligned}$$

ein Widerspruch wegen $uv^\omega \in L$ und $st^\omega \notin L$.

■

Man kann aber nicht schließen, dass aus einem endlichen Index von $\approx_L$ bereits die ω-Regularität von L folgt. Aus der Definition von Arnold's Kongruenz folgt sofort, dass zwei infinitäre Sprachen L_1, L_2 mit gleichen schließlich periodischen Wörtern die gleiche Arnold'sche Kongruenze $\approx_{L_1}=\approx_{L_2}$ besitzen. Für jede ω-reguläre Sprache L sind aber die schließlich periodischen Wörter von L und $L \cup L_0$ mit L_0 aus Beispiel 3.2 gleich, und damit auch deren Arnold'sche Kongruenz, die wegen der ω-Regularität von L endlichen Index besitzt. Dennoch ist $L \cup L_0$ nicht ω-regulär.

3.3 Komplement-Automat eines Büchi-Automaten

Sei $B = (S, \Sigma, \Delta, s_0, F)$ ein Büchi-Automat, so gilt

$$\begin{aligned} L_2(B) \neq \emptyset \iff & \exists s \in S\ \exists \text{ endliche runs } r_1, r_2 \in Run^B : \\ & r_1 \text{ läuft von } s_0 \text{ nach } s \text{ und} \\ & r_2 \text{ läuft von } s \text{ über einen Zustand aus } F \text{ nach } s. \end{aligned}$$

D.h., in B muss ein erreichbarer Kreis mit einem Zustand aus F vorkommen. Diese Eigenschaft ist natürlich leicht nachprüfbar. Also gilt das

Lemma 3.7 *Es ist entscheidbar, ob eine 2-akzeptierte infinitäre Sprache leer ist.*

Die algebraische Automatentheorie liefert eine Technik, aus einem Büchi-Automaten B einen Büchi-Automaten B^- zu konstruieren, der gerade $\Sigma^\omega - L_2(B)$ akzeptiert.

Satz 3.3 (Komplement eines Büchi-Automaten) *Zu jedem Büchi-Automaten B kann ein Büchi-Automat B^- konstruiert werden, der gerade das Komplement akzeptiert, also mit*

$$L_2(B^-) = \Sigma^\omega - L_2(B).$$

Beweis: Sei $B = (S, \Sigma, \Delta, s_0, F)$ gegeben. OBdA seien alle Zustände von B erreichbar. Es seien $S = \{s_1, ..., s_n\}$ und $\Sigma = \{a_1, ..., a_m\}$. Wir wollen die Büchi-Kongruenz $\sim := \sim_B$ zu B berechnen. Jede Äquivalenzklasse $[w]_\sim$ mit Repräsentant w ist durch den Vektor

$$\overrightarrow{w} := (\Delta(s_1, w), \Delta_F(s_1, w), ..., \Delta(s_n, w), \Delta_F(s_n, w))$$

unabhängig von w beschrieben.
Ein Vektor $v \in (2^S)^{2n}$ heißt *erreichbar*, falls ein $w \in \Sigma^*$ existiert mit $\overrightarrow{w} = v$. Man kann nun leicht alle erreichbare Vektoren mit deren Repräsentanten finden, etwa wie folgt:

$V_\varepsilon := \{\overrightarrow{\varepsilon}\}$; $\rho(\overrightarrow{\varepsilon}) := \varepsilon$; $w := \varepsilon$;
repeat
sei w' der direkte Nachfolger von w in der lexiographische Ordnung, so setze
$V_{w'} := V_w \cup \{\overrightarrow{w'}\}$; für $\overrightarrow{w'} \notin V_w$ setze $\rho(\overrightarrow{w'}) := w'$;
$w := w'$
until $\exists n \in \mathbb{N}: \ \forall a \in \Sigma : \forall u, v \in \Sigma^n : \ V_u = V_v = V_{ua}$;
$V := V_w$

Damit ist V die Menge aller Äquivalenzklassen von $\sim$ und zu jedem $v \in V$ ist $\rho(v)$ ein Repräsentant in Σ^*. Es sei $k := |V|$ und $\{w_1, ..., w_k\}$ die Menge der Repräsentanten für V.
Für jedes $i \leq k$ können wir mit Satz 3.1 einen Büchi-Automaten B_i konstruieren mit $L_{fin}(B_i) = [w_i]_\sim$. Mit dem Beweis zu Satz 2.2 finden wir zu jedem Paar $i, j \leq k$ einen Büchi-Automaten $B_{i,j}$ mit

$$L_2(B_{i,j}) = [w_i]_\sim [w_j]_\sim^\omega.$$

Mit der Parallekonstruktion von Automaten konstruieren wir einen weiteren Büchi-Automaten $B_{i,j}^\cap$ mit

$$L_2(B_{i,j}^\cap) = [w_i]_\sim [w_j]_\sim^\omega \cap L_2(B).$$

Man testet nun, ob $L_2(B_{i,j}^\cap) = \emptyset$ gilt. Gilt $L_2(B_{i,j}^\cap) = \emptyset$, so liegt $[w_i]_\sim [w_j]_\sim^\omega$ ganz in $\Sigma^\omega - L_2(B)$, da $L_2(B)$ und $\Sigma^\omega - L_2(B)$ von $\sim$ saturiert werden. Damit gilt

$$\Sigma^\omega - L_2(B) = \bigcup \{[w_i]_\sim [w_j]_\sim^\omega \mid i, j \leq k \wedge L_2(B_{i,j}^\cap) = \emptyset\}.$$

Ebenfalls mit der Prallelkonstruktion von Automaten konstruiert man nun leicht einen Büchi-Automaten B^-, der $\bigcup \{[w_i]_\sim [w_j]_\sim^\omega \mid i, j \leq k \wedge L_2(B_{i,j}^\cap) = \emptyset\}$ 2-akzeptiert.

■

Von Pecuchet ist in [10] eine Modifikation der obigen Methode angegeben, so dass B^- "nur" $4^{n^2}(4^{n^2} + 1)$ Zustände benötigt, falls B n besitzt.

4 Logische Theorie von ω-regulären Sprachen

Die **S**econd Order Logik mit **1 S**uccessor-Funktion (S1S) ist eine Logik der 2. Stufe mit Variablen über Individuen und Mengen. Ihre Syntax und Semantik ist wie folgt definierbar.

4.1 Syntax der S1S

Variable
Var_I sei eine abzählbare Menge von *(Individuen-)Variablen*,
Var_S sei eine abzählbare Menge von *(Mengen-)Variablen* mit $Var_I \cap Var_S = \emptyset$.
Terme
S ist eine einstellige *Funktionenkonstante*.
Jede Individuenvariable ist ein *Term*, und ist t bereits ein Term so auch $S(t)$.
Damit haben alle Terme also die Gestalt $S^n(x)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $x \in Var_I$, wobei $S^0(x) := x$ und $S^{n+1}(x) := S(S^n(x))$ gilt.
Formeln
Für $X, Y \in Var_S$, $t, t_1, t_2 \in Term$ sind

$$t \in X,\ t_1 = t_2,\ X = Y$$

atomare Formeln.
Jede atomare Formel ist eine *Formel.* Sind Ψ, Φ bereits Formeln und sind $x \in Var_I, X \in Var_S$, so sind auch

$$(\Psi \wedge \Phi),\ (\neg\Psi),\ (\exists x\Psi),\ (\exists X\Psi)$$

Formeln.

Folgende Abkürzungen sind gebräuchlich:

$$\begin{aligned}
\Psi \vee \Phi &:= \neg(\neg\Psi \wedge \neg\Phi),\\
\Psi \rightarrow \Phi &:= \neg\Psi \vee \Phi,\\
\forall x\Psi &:= \neg\exists x\neg\Psi,\\
\forall X\Psi &:= \neg\exists X\neg\Psi,\\
x \notin X &:= \neg(x \in X),\\
x \neq y &:= \neg(x = y),\\
X \neq Y &:= \neg(X = Y)
\end{aligned}$$

wobei bereits folgende *Klammerersparnisregeln* verwendet wurden:

$$\neg, \exists, \forall \text{ binden stärker als } \wedge, \vee,$$

$$\wedge, \vee \text{ binden stärker als } \rightarrow .$$

Wir machen ab, dass wir mit x, y, x_i stets Individuenvariablen, mit X, Y, X_i stets Mengenvariablen, mit t, t_i stets Terme, und mit Ψ, Φ, Ψ_i stets Formeln der S1S meinen.

Freie Variable
Die freien Variablen FV eines Terms oder einer Formel sind induktiv definiert als:

$$
\begin{array}{ll}
FV(x) := \{x\}, & FV(S(t)) := FV(t), \\
FV(t \in X) := FV(t) \cup \{X\}, & FV(t_1 = t_2) := FV(t_1) \cup FV(t_2), \\
FV(X = Y) := \{X, Y\}, & \\
FV(\Psi \wedge \Phi) := FV(\Psi) \cup FV(\Phi), & FV(\neg\Psi) := FV(\Psi), \\
FV(\exists x \Psi) := FV(\Psi) - \{x\}, & FV(\exists X \Psi) := FV(\Psi) - \{X\}.
\end{array}
$$

Ist Ψ eine Formel mit den freien Variablen $FV(\Psi) = \{X_1, ..., X_m, x_1, ..., x_n\}$, so schreibt man auch

$$\Psi(X_1, ..., X_m, x_1, ..., x_n)$$

für Ψ. Eine Formel ohne freie Variable heißt auch ein *Satz*.

4.2 Semantik der S1S

Interpretation, Modell
Eine *Interpretation* $\Im$ ist eine Abbildung

$$\Im : Var_I \cup Var_S \to \mathbb{N} \cup 2^{\mathbb{N}} \text{ mit}$$

$$\forall x \in Var_I : \ \Im(x) \in \mathbb{N} \text{ und } \forall X \in Var_S : \Im(X) \subseteq \mathbb{N}.$$

Als *Modell* für S1S wählen wir die Algebra $(\mathbb{N}, +1)$ mit $\mathbb{N}$ als Grundbereich und der Nachfolgerfunktion $+1$ als feste Interpretation für die Funktionenkonstante S.

Die Interpretation $\Im$ wird damit kanonisch auf Terme fortgesetzt durch

$$\Im(S(t)) := \Im(t) + 1.$$

Die *Erfüllbarkeit* einer Formel Ψ der S1S unter der Interpretation $\Im$ in $(\mathbb{N}, +1)$, in Zeichen

$$(\mathbb{N}, +1) \models_{\Im} \Psi$$

oder nur $(\mathbb{N}, +1) \models \Psi$, wenn $\Im$ aus dem Kontext klar ist, ist induktiv definiert wie folgt:

$$
\begin{array}{ll}
(\mathbb{N}, +1) \models_{\Im} t \in X & :\Longleftrightarrow \Im(t) \in \Im(X), \\
(\mathbb{N}, +1) \models_{\Im} t_1 = t_2 & :\Longleftrightarrow \Im(t_1) = \Im(t_2), \\
(\mathbb{N}, +1) \models_{\Im} X = Y & :\Longleftrightarrow \Im(X) = \Im(Y), \\
(\mathbb{N}, +1) \models_{\Im} \Psi \wedge \Phi & :\Longleftrightarrow (\mathbb{N}, +1) \models_{\Im} \Psi \text{ und } (\mathbb{N}, +1) \models_{\Im} \Phi, \\
(\mathbb{N}, +1) \models_{\Im} \neg\Psi & :\Longleftrightarrow \text{nicht } (\mathbb{N}, +1) \models_{\Im} \Psi, \\
(\mathbb{N}, +1) \models_{\Im} \exists x \Psi & :\Longleftrightarrow \text{es existiert ein } a \in \mathbb{N} \text{ mit } (\mathbb{N}, +1) \models_{\Im^{x/a}} \Psi, \text{ und} \\
(\mathbb{N}, +1) \models_{\Im} \exists X \Psi & :\Longleftrightarrow \text{es existiert ein } A \subseteq \mathbb{N} \text{ mit } (\mathbb{N}, +1) \models_{\Im^{X/A}} \Psi,
\end{array}
$$

wobei $\Im^{x/a}$ (bzw. $\Im^{X/A}$) die modifizierte Interpretation von $\Im$ ist, in der jetzt x auf a (bzw X auf A) abgebildet wird.

Beispiel 4.1

Betrachten wir folgende Abkürzungen

$$\begin{array}{ll} null(z) & :\equiv \neg\exists x S(x) = z, \\ X \subseteq Y & :\equiv \forall x(x \in X \to x \in Y), \\ Suff(X) & :\equiv \forall x(x \in X \to S(x) \in X), \\ x \leq y & :\equiv \forall X(Suff(X) \land x \in X \to y \in X), \\ X \subsetneq Y & :\equiv x \subseteq Y \land X \neq Y, \\ Fin(X) & :\equiv \exists Z(X \subsetneq Z \land \exists y\, y \notin Z \land \forall x(x \notin Z \to S(x) \notin Z), \text{ und} \\ Sing(X) & :\equiv \exists Y(Y \subseteq X \land Y \neq X \land \neg\exists Z(Z \subseteq X \land Z \neq X \land Z \neq Y)) \end{array}$$

dann gilt

$$\begin{array}{ll} (\mathbb{N}, +1) \models_{\Im} null(z) & \iff \Im(z) = 0, \\ (\mathbb{N}, +1) \models_{\Im} X \subseteq Y & \iff \Im(X) \subseteq \Im(Y), \\ (\mathbb{N}, +1) \models_{\Im} x \leq y & \iff \Im(x) \leq \Im(y), \\ (\mathbb{N}, +1) \models_{\Im} Fin(X) & \iff \Im(X) \text{ ist eine endliche Menge, und} \\ (\mathbb{N}, +1) \models Sing(X) & \iff \Im(X) \text{ ist einelementige Menge, d.h. eine Zahl.} \end{array}$$

□

Damit könnten wir auch auf Individuenvariablen verzichten: Wir fassen auch x als Mengenvariable auf und ersetzen in jeder Formel x durch $x \land Sing(x)$.

4.3 Definierbarkeit in der S1S

Es sei $\Psi(X_1, ..., X_m, x_1, ..., x_n)$ eine Formel der S1S.

$$(\mathbb{N}, +1) \models \Psi(A_1, ..., A_m, a_1, ..., a_n)$$

ist eine Abkürzung für

$$(\mathbb{N}, +1) \models_{\Im} \Psi$$

für die Interpretation $\Im$ mit

$$\Im(X_i) = A_i \text{ für } 1 \leq i \leq m \text{ und } \Im(x_i) = a_i \text{ für } 1 \leq i \leq n,$$

für $A_1, ..., A_m \subseteq \mathbb{N}, a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$.

Definition 4.1 (S1S-Definierbarkeit) *Für* $FV(\Psi) = \{X_1, ..., X_m, x_1, ..., x_n\}$ *ist die von* Ψ definierbare *Menge* $M \subseteq (2^{\mathbb{N}})^m \times \mathbb{N}^n$ *gerade*

$$Def(\Psi) := \{(A_1, ..., A_m, a_1, ..., a_n) \mid (\mathbb{N}, +1) \models \Psi(A_1, ..., A_m, a_1, ..., a_n)\}.$$

Für $m, n \in \mathbb{N}$ *heißt eine Teilmenge* $M \subseteq (2^{\mathbb{N}})^m \times \mathbb{N}^n$ S1S-definierbar, *falls eine Formel* Ψ *der S1S existiert mit* $M = Def(\Psi)$.

Beispiel 4.2 $G := \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, *die Menge der geraden Zahlen ist S1S-definierbar, etwa durch die Formel* $\Psi_G(X) :\equiv$

$$\forall x(x \in X \rightarrow S(x) \notin X \wedge x \notin X \rightarrow S(x) \in X) \wedge \exists x(null(x) \wedge x \in X).$$

$\square$

Verschlüsselung von $M \subseteq (2^{\mathbb{N}})^m \times \mathbb{N}^n$ **in** $\Gamma(m,n)^\omega$
Wir fassen

$$\Gamma(m,n) := \{0,1\}^{m+n}$$

als ein Alphabet auf, dessen Buchstaben damit Vektoren der Dimension $m+n$ über $\{0,1\}$ sind. Diese Vektoren werden senkrecht geschrieben.
Für $A \subseteq \mathbb{N}$ ist die charakteristische Funktion $\chi_A : \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$ üblicherweise definiert durch $\chi_A(i) = 1 :\Longleftrightarrow i \in A$. Wir wollen χ als infinitäres Wort auffassen. Da wir aber infinitäre Wörter als Abbildung von $\mathbb{N}_+$ aus definiert haben, modifizieren wir

$$\chi : \mathbb{N}_+ \rightarrow \{0,1\} \text{ mit } \chi_A(i) = 1 :\Longleftrightarrow i - 1 \in A.$$

Wir identifizieren $n \in \mathbb{N}$ auch mit $\{n\} \subset \mathbb{N}$. Damit ist auch χ_n definiert mit

$$\chi_n(i) = 1 :\Longleftrightarrow i - 1 = n.$$

Wir verschlüsseln nun jede Teilmenge $M \subseteq (2^{\mathbb{N}})^m \times \mathbb{N}^n$ in eine infinitäre Sprache $L(M)$ über dem Alphabet $\Gamma(m,n)$ wie folgt:

Für $x = (A_1, ..., A_m, a_1, ..., a_n) \in (2^{\mathbb{N}})^m \times \mathbb{N}^n$ sei

$$\nu(x) := \chi_{A_1} \times ... \times \chi_{A_m} \times \chi_{a_1} \times ... \times \chi_{a_n}$$

das infinitäres Wort über $\Gamma(m,n)$ mit

$$\pi_j(\nu(x)) = A_j \text{ , für } 1 \leq j \leq m, \text{ und}$$

$$\pi_j(\nu(x)) = a_j \text{ , für } m < j \leq m+n.$$

Hierbei sind die π_i die Projektionen auf die i-te Koordinate. Also,

$$w = w(1)w(2)...w(n)... \in \Gamma(m,n)^\omega \implies \pi_i(w) = \pi_i(w(1))\pi_i(w(2))...\pi_i(w(n))... \in \{0,1\}^\omega.$$

Damit setzen wir

$$L(M) := \{\nu(x) \mid x \in M\}.$$

Beispiel 4.3 *$A_1 = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $A_2 = \{p \in \mathbb{N} \mid p$ ist prim $\}$, $a_1 = 4$, dann gilt*

$$\nu(A_1, A_2, a_1) = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \ldots$$

□

Definition 4.2 *Ein Büchi-Automat $B = (S, \Gamma, \Delta, s_0, F)$* akzeptiert *eine Formel Ψ aus S1S, falls gilt*

$$L_2(B) = L(Def(\Psi)).$$

B akzeptiert *eine Teilmenge $M \subseteq (2^{\mathbb{N}})^m \times \mathbb{N}^n$, falls gilt*

$$L_2(B) = L(M).$$

Beispiel 4.4

$$\mathcal{G} := \{M \subseteq \mathbb{N} \mid M \text{ ist endlich und besitzt eine gerade Anzahl von Elementen } \}$$

ist ebenfalls $S1S$-definierbar, allerdings ist eine definierende Formel deutlich schwieriger anzugeben. Abbildung 3 zeigt einen Büchi-Automaten $B_{\mathcal{G}}$, der gerade $L(\mathcal{G})$ 2-akzeptiert: $w \in L_2(B_{\mathcal{G}}) \iff w$ besteht aus gerade vielen Buchstaben $1 \iff w = \chi_A$ und A ist eine endliche Menge von gerade vielen Elementen.

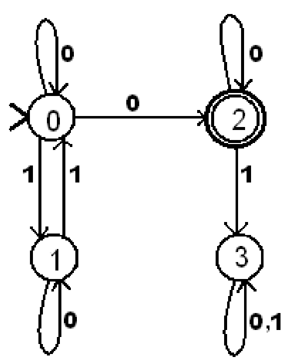

Figure 3: Ein Automat für $\mathcal{G}$

$B_{\mathcal{G}}$ gibt nun ein Schema vor, eine S1S-Formel $\Psi_{\mathcal{G}}$ zu konstruieren, die gerade $L_2(B_{\mathcal{G}})$ definiert:
$\Psi_{\mathcal{G}} :\equiv \exists Y_0 \exists Y_1 \exists Y_2 \exists Y_3 (\neg\exists x(x \in Y_0 \wedge x \in Y_1) \wedge \neg\exists x(x \in Y_0 \wedge x \in Y_2) \wedge \neg\exists x(x \in Y_0 \wedge x \in Y_3) \wedge$

$\neg\exists x(x \in Y_1 \wedge x \in Y_2) \wedge \neg\exists x(x \in Y_1 \wedge x \in Y_3) \wedge \neg\exists x(x \in Y_2 \wedge x \in Y_3) \wedge$
$\exists x(null(x) \wedge x \in Y_0) \wedge \forall x($
$(x \in Y_0 \wedge x \in X \rightarrow S(x) \in Y_1) \wedge$
$(x \in Y_0 \wedge x \notin X \rightarrow (S(x) \in Y_0 \vee S(x) \in Y_2)) \wedge$
$(x \in Y_1 \wedge x \in X \rightarrow S(x) \in Y_0) \wedge$
$(x \in Y_1 \wedge x \notin X \rightarrow S(x) \in Y_1) \wedge$
$(x \in Y_2 \wedge x \in X \rightarrow S(x) \in Y_3) \wedge$
$(x \in Y_2 \wedge x \notin X \rightarrow S(x) \in Y_2) \wedge$
$(x \in Y_3 \rightarrow S(x) \in Y_3)) \wedge$
$\forall y \exists x(y \leq x \wedge y \neq x \wedge x \in Y_2).$

Y_0, Y_1, Y_2 und Y_3 beschreiben die Zustände $0, 1, 2, 3$ von $B_{\mathcal{G}}$. $x \in Y_i$ sagt, dass wir einen run verfolgen, der zum Zeitpunkt x den Zustand i erreicht. $x \in X$ sagt, dass wir zum Zeitpunkt x einen Buchstaben 1 lesen, und $x \notin X$, dass wir zum Zeitpunkt x eine 0 lesen. Die ersten Teile sagen, dass man zu keinem Zeitpunkt in mehreren Zuständen sein kann. Anschließend wird gesagt, dass wir zu Beginn im Startzustand 0 sind und danach die Zustände gemäß der Automatenübergangsrelation ändern dürfen. Letztens wird gesagt, dass der finale Zustand 2 unendlich oft angenommen werden muss.

□

Satz 4.1 (Logische Charakterisierung von Reg$^\omega$) *$\forall n, m \in \mathbb{N} : \forall M \subseteq (2^{\mathbb{N}})^m \times \mathbb{N}^n$:*

$$L(M) \in Reg^\omega \iff M \text{ ist S1S-definierbar} .$$

Beweis: "$\Longrightarrow$": Das letzte Beispiel zeigt das Prinzip der Übersetzung von einem Büchi-Automaten in eine Formel. Details finden sich in [11].
"$\Longleftarrow$": Induktion über den Aufbau der Formeln der S1S:

$\Psi \equiv t \in X$: Es gilt $t = S^n(x)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $x \in Var_I$.
1. Fall: $n = 0$: $Def(x \in X) = \{(A, a) \mid a \in A \subseteq \mathbb{N}\}$ wird von $B_{x \in X}$ aus Abbildung 4 akzeptiert.

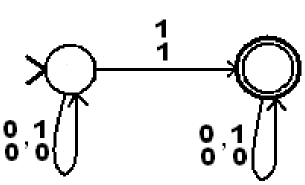

Figure 4: Ein Automat für $x \in X$

2. Fall: $n > 0$: $Def(S^n(x) \in X) = \{(A, a) \mid a + n \in A\}$ wird von $B_{S^n(x) \in X}$ aus Abbildung 5 akzeptiert.

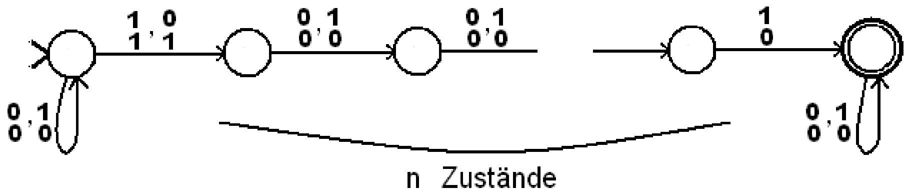

Figure 5: Ein Automat für $S^n(x) \in X$

$\Psi \equiv t_1 = t_2$ ($\equiv S^n(x) = S^m(y)$): Sei $n \leq m$ (der Fall $m \leq n$ ist völlig analog), dann ist $Def(\Psi(x, y)) = \{(a, b) \mid a + n = b + m\} = \{(a, b) \mid a = b + (m - n)\}$ und wird von $B_{S^n(x) = S^m(y)}$ aus Abbildung 6 akzeptiert.

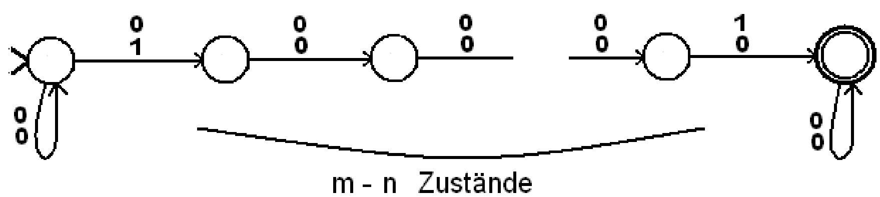

Figure 6: Ein Automat für $S^n(x) = S^m(y)$

$\Psi \equiv X = Y$: $Def(X = Y) = \{(A, B) \mid A = B\}$ wird akzeptiert von $B_{X=Y}$ aus Abbildung 7.

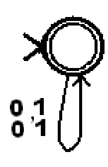

Figure 7: Ein Automat für $X = Y$

$\Psi \equiv \neg\Phi$: Sei B ein Büchi-Automat der Φ akzeptiert, so existiert auch ein Büchi-Automat B^-, der das Komplement von B, also Ψ, akzeptiert, da Reg^ω gegen Komplement abgeschlossen ist. Mit Satz 3.3 kann man B^- auch aus B effektiv konstruieren.

$\Psi \equiv \Phi_1 \wedge \Phi_2$: Beide Formeln müssen nicht die gleichen freien Variablen in gleicher Reihenfolge besitzen. Für die Konstruktion akzeptierender Büchi-Automaten ist die Reihenfolge technisch wichtig, nicht aber inhaltlich. Denn akzeptiert $B = (S, \{0,1\}^{m+n}, \Delta, s_0, F)$ $\Phi(y_1, ..., y_n)$ und ist γ eine Permutation auf $\{0, ..., m+n\}$, so wird $\Phi(y_{\gamma(1)}, ..., y_{\gamma(m+n)})$ gerade von $B^\gamma := (S, \{0,1\}^{m+n}, \Delta^\gamma, s_0, F)$ akzeptiert mit

$$\Delta^\gamma(s, (a) := \Delta(s, a_{\gamma^{-1}(1)}, ..., a_{\gamma^{-1}(m+n)})),$$

mit $a = (a_1, ..., a_{m+n}) \in \{0,1\}^{m+n}$. Hierbei ist y eine Individuen- oder Mengen-Variable.

Ist X eine freie Mengen-Variable von Φ_2, die in Φ_1 nicht vorkommt, so ersetzen wir Φ_1 durch $\Phi_1 \wedge X = X$. OBdA sei X die erste Variable in $\Phi_1 \wedge X = X$. $B = (S, \{0,1\}^{m+n}, \Delta, s_0, F)$ akzeptiere Φ_1, dann wird $\Phi_1 \wedge X = X$ akzeptiert von $B' := (S, \{0,1\}^{m+n+1}, \Delta', s_0, F)$ mit $s' \in \Delta'(s, (i, a)) :\Leftrightarrow s' \in \Delta(s, a)$ gilt für $i = 0, 1$.
Für eine Individuen-Variable x wird der Automat B' allerdings komplizierter, da eine Individuen-Variable durch eine Zahl interpretiert werden muss, d.h. der akzeptierende Automat muss auf der entsprechenden Spur genau einmal einen 1-Übergang zulassen. Sei also x eine Individuen-Variable von Φ_2, die nicht in Φ_1 vorkommt, so ersetzen wir Φ_1 durch $\Phi_1 \wedge x = x$. OBdA sei x die letzte Variable in $\Phi_1 \wedge x = x$. Wird Φ_1 von $B = (S, \{0,1\}^{m+n}, s_0, F)$ akzeptiert, so wird $\Phi_1 \wedge x = x$ akzeptiert von $B' := (S \cup \hat{S}, \{0,1\}^{m+n+1}, \Delta', s_0, \hat{F})$ mit

$s' \in \Delta'(s, (a, 0)) :\Longleftrightarrow\ s' \in \Delta(s, a)$,
$\hat{s}' \in \Delta'(s, (a, 1)) :\Longleftrightarrow\ s' \in \Delta(s, a)$,
$\hat{s}' \in \Delta'(\hat{s}, (a, 0)) :\Longleftrightarrow\ s' \in \Delta(s, a)$.

Mit diesen Trick der Zustandsverdopplung erzwingen wir eine Interpretation der letzten Koordinate als Zahl: 1 kommt genau einmal in dieser Koordinate vor. Wir können also oBdA annehmen, dass Φ_1 und Φ_2 die gleichen freien Variablen in gleicher Reihenfolge besitzen. Damit gilt $Def(\Phi_1 \wedge \Phi_2) = Def(\Phi_1) \cap Def(\Phi_2)$ gilt. Mit der Parallelkonstruktion von Automaten aus Satz 1.1 kann man aus Automaten B_1 und B_2, die Φ_1 bzw Φ_2 akzeptieren, auch einen Automaten effektiv konstruieren, der $\Phi_1 \wedge \Phi_2$ akzeptiert.

$\Psi \equiv \exists x \Phi$: Es sei $FV(\Phi) = \{X_1, ..., X_m, x_1, ..., x_n\}$, und oBdA sei $x = x_n$. Der Automat $B = (S, \{0,1\}^{m+n}, \Delta, s_0, F)$ akzeptiere Φ, dann wird $\exists x \Phi$ von $B' := (S \cup \hat{S}, \{0,1\}^{m+n-1}, \Delta', s_o, \hat{F})$ akzeptiert mit

$s' \in \Delta'(s, a) :\Longleftrightarrow\ s' \in \Delta(s, (a, 0))$,
$\hat{s}' \in \Delta'(s, a) :\Longleftrightarrow\ s' \in \Delta(s, (a, 1))$,
$\hat{s}' \in \Delta'(\hat{s}, a) :\Longleftrightarrow\ s' \in \Delta(s, (a, 0))$.

Denn
$w \in Def(\exists x\Phi)$
$\iff \exists n \in \mathbb{N} : w \times \chi_n \in Def(\Phi)$
$\iff \exists n \in \mathbb{N}:$ B akzeptiert $w \times \chi_n$
$\iff B'$ akzeptiert w
$\iff w \in Def(\exists x\Phi)$.

$\Psi \equiv \exists X\Phi$: Es sei $FV(\Phi) = \{X_1, ..., X_m, x_1, ..., x_n\}$, und oBdA sei$X = X_1$. Der Automat $B = (S, \{0,1\}^{m+n}, \Delta, s_0, F)$ akzeptiere Φ, dann wird $\exists X\Phi$ von $B' := (S, \{0,1\}^{m+n-1}, \Delta', s_o, F)$ akzeptiert mit $s' \in \Delta'(s, a) :\Leftrightarrow \exists i \in \{0,1\} : s' \in \Delta(s,(i,a))$. Denn
$w \in Def(\exists X\Phi)$
$\iff \exists A \subseteq \mathbb{N} : \chi_A \times w \in Def(\Phi)$
$\iff \exists A \subseteq \mathbb{N}:$ B akzeptiert $\chi_A \times w$
$\iff B'$ akzeptiert w.

■

Wir haben im Beweis sogar gezeigt, dass zu einer $S1S$-Formel Ψ ein Büchi-Automat B_Ψ, der Ψ akzeptiert, effektiv konstruierbar ist.

4.4 Entscheidbarkeit der S1S

$$Th(S1S) := \{\Psi \in S1S \mid FV(\Psi) = \emptyset \text{ und } (\mathbb{N}, +1) \models \Psi\}$$

besteht aus allen wahren Sätzen, die in der $S1S$ formulierbar sind. Wenn Ψ keine freien Variablen besitzt, so bedeutet $(\mathbb{N}, +1) \models \Psi$, dass Ψ unter jeder Interpretation wahr wird. Von Büchi ist folgender berühmter Satz, der die Theorie von Automaten über unendlich langen Worten erst begründet hat:

Satz 4.2 (Büchi) *$Th(S1S)$ ist entscheidbar.*

Beweis: Per Definition besitzt jede Formel Ψ der S1S mindestens eine Variable. Falls sie keine freien Variablen besitzt, muss Ψ oBdA die Form $\exists x\Phi(x)$, $\exists X\Phi(X)$, $\neg\exists x\Phi(x)$ oder $\neg\exists X\Phi(X)$ haben. Es sei B ein Büchi-Automat, der Φ akzeptiert. In den ersten beiden Fällen gilt damit $(\mathbb{N}, +1) \models \Psi$ gdw. $L_2(B)$ nicht leer ist, und in den beiden letzten Fällen gilt $(\mathbb{N}, +1) \models \Psi$ gdw. $L_2(B)$ leer ist.
Nun kann man mit Lemma 3.7 leicht prüfen, wann $L_2(B)$ leer ist: $L_2(B)$ ist genau dann nicht leer, falls ein Zustand $s \in F$ existiert, der vom Startzustand erreichbar ist und der auf einem Kreis liegt.

■

5 Weitere Akzeptanzkonzepte

5.1 Verbands der Rat-Klassen

Definition 5.1 (i-Akzeptanz) *Es seien $A = (S, \Sigma, \Delta, s_0)$ ein Automat, $\mathcal{F} \subseteq 2^S$ eine Menge von finalen Zustandsmengen und $r \in Run_{s_0}^A$ ein run. Wir sagen, dass der Muller-Automat $(A, \mathcal{F})$ den run r*

- 1-akzeptiert $:\Longleftrightarrow \exists D \in \mathcal{F} : Zu(r) \cap D \neq \emptyset$,
- $1'$-akzeptiert $:\Longleftrightarrow \exists D \in \mathcal{F} : Zu(r) \subseteq D$,
- 2-akzeptiert $:\Longleftrightarrow \exists D \in \mathcal{F} : Inf(r) \cap D \neq \emptyset$,
- $2'$-akzeptiert $:\Longleftrightarrow \exists D \in \mathcal{F} : Inf(r) \subseteq D$,
- 3-akzeptiert $:\Longleftrightarrow \exists D \in \mathcal{F} : Inf(r) = D$.

$$L_i(A) := \{w \in \Sigma^\omega \mid \exists r \in Run_{s_0}(w) : A \text{ i-akzeptiert } r\}$$

ist die i-akzeptierte *infinitäre Sprache von A für $i \in \{1, 1', 2,', 3\}$.*
$Rat_{i,\Sigma}$ ist die Klasse aller i-akzeptierten infinitären Sprachen über Σ, und
$Rat_{i,\Sigma}^d$ ist die Klasse aller von determinierten Muller-Automaten i-akzeptierten infinitären Sprachen über Σ.
Ein Büchi-Automat $B = (S, \Sigma, \Delta, s_0, F)$ i-akzeptiert eine Sprache L falls der Muller-Automat $M := (S, \Sigma, \Delta, s_0, \{F\})$ L i-akzeptiert.

Wir verzichten wieder auf den Index Σ der besseren Lesbarkeit willen. Sprachen in Rat_i (Rat_i^d) heißen auch *(determiniert) i-rational.*

Beispiel 5.1 *Es sei A der Automat aus Abbildung 1 mit $\mathcal{F} := \{\{s_2\}\}$. Dann gilt mit $\Sigma = \{a, b\}$:*

- $L_1(A) = b^* a \Sigma^\omega = \Sigma^\omega - b^\omega$,
- $L_{1'}(A) = \emptyset$,
- $L_2(A) = (b^* a)^\omega = \Sigma^\omega - \Sigma^* b^\omega$,
- $L_{2'}(A) = L_3(A) = \Sigma^* a^\omega$.

□

Rat_2 und Rat_2^d wurden bereits in Kapitel 4 als Klassen der von (determinierten) Büchi-Automaten 2-akzeptierten infinitären Sprachen definiert. Dass beide Definitionen übereinstimmen folgt aus

Satz 5.1 *Für $i \in \{1, 1', 2, 2'\}$ existiert zu jedem Muller-Automaten $(A, \mathcal{F})$ ein Büchi-Automat (B, F) mit $L_i((A, \mathcal{F})) = L_i((B, F))$ und zu jedem determinierten Muller-Automaten $(A, \mathcal{F})$ ein determinierter Büchi-Automat (B, F) mit $L_i((A, \mathcal{F})) = L_i((B, F))$. Dies gilt nicht für $i = 3$.*

Beweis: Für $i = 1, 2$ wähle zu $(A, \mathcal{F})$ einfach den Büchi-Automaten $(A, \bigcup \mathcal{F})$ mit $\bigcup \mathcal{F} := \bigcup_{D \in \mathcal{F}} D$. Damit gilt $L_i((A, \mathcal{F})) = L_i((A, \bigcup \mathcal{F}))$.

Für $i = 2'$ konstruieren wir zu $(A, \mathcal{F})$ die $\mathcal{F}$-Vervollständigung $A^{\mathcal{F}}$ und $\hat{\mathcal{F}}$ (vgl den Beweis zu Satz 2.3) und setzen $(B, F) := (A^{\mathcal{F}}, \bigcup \hat{\mathcal{F}})$. Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
& w \in L_{2'}((A, \mathcal{F})) \\
& \quad \Longleftrightarrow \exists r \in Run_{s_0}^{A}(w) : \exists D \in \mathcal{F} : Inf(r) \subseteq D \\
& \quad \Longleftrightarrow \exists r \in Run_{s_0}^{A^{\mathcal{F}}}(w) : \exists \hat{D} \in \hat{\mathcal{F}} : Inf(r) \subseteq \hat{D} \\
& \quad \Longleftrightarrow \exists r \in Run_{s_0}^{A^{\mathcal{F}}}(w) : Inf(r) \subseteq F \text{ (da kein run ein } \hat{D} \text{ verlassen kann)} \\
& \quad \Longleftrightarrow \exists r \in Run_{s_0}^{A^{\mathcal{F}}}(w) : Zu(r) \cap F \neq \emptyset \\
& \quad \Longleftrightarrow w \in L_{2'}(B, F).
\end{aligned}
$$

Insbesondere also $L_{2'}((A, \mathcal{F})) = L_{2'}((A^{\mathcal{F}}, F)) = L_1((A^{\mathcal{F}}, F))$, und $Rat_{2'} \subseteq Rat_1$ wurde mit bewiesen. Wegen der Einführung und späteren Elimination von ε-Kanten ist $A^{\mathcal{F}}$ auch dann nicht determiniert, falls es A ist. Wir brauchen also für determinierte Muller-Automaten eine andere Konstruktion.

Seien also $A = (S, \Sigma, \delta, s_0)$ determiniert und $\mathcal{F} = \{D_1, ..., D_m\}$ mit $D_i \subseteq S$. Wir setzen

$$
\begin{aligned}
B &:= (S', \Sigma, \delta', s_0') \text{ mit} \\
S' &:= S \times \{0, 1\}^m, \\
s_0' &:= (s_0, \sigma_0) \text{ mit } \sigma_0 \in \{0, 1\}^m \text{ und} \\
\sigma_0(i) = 1 &:\Longleftrightarrow s_0 \in D_i, \text{ für } 1 \leq i \leq m, \\
\delta'((s, \sigma), a) &:= (\delta(s, a), \sigma') \text{ mit} \\
\sigma'(i) = 1 &:\Longleftrightarrow \delta(s, a) \in D_i \text{ für } 1 \leq i \leq m.
\end{aligned}
$$

σ notiert mit einer 1 in Koordinate i, dass der run gerade einen Zustand annimmt, der auch in D_i liegt. Es seien $r = s_0 w$ der einzige run in A vom Startzustand mit Beschriftung w und $r' = s_0' w$ der einzige run in B vom Startzustand mit Beschriftung w. Bleibt r schließlich in einer der Mengen D_i, so kann in r' kein Zustand $(s, 0^m)$ wieder angenommen werden. Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
\exists i \leq m : Inf(r) \subseteq D_i &\Longleftrightarrow \forall s \in: (s, 0^m) \notin Inf(r') \\
&\Longleftrightarrow Inf(r') \subseteq F \text{ mit } F := S \times (\{0, 1\}^m - 0^m),
\end{aligned}
$$

also $L_{2'}((A, \mathcal{F})) = L_{2'}((B, F))$.

Für $i = 1'$ konstruieren wir zu $A = (S, \Sigma, \Delta, s_0)$ und $\mathcal{F} \subseteq 2^S$ den Büchi-Automaten (B, F) mit

$$\begin{aligned} B &:= (S', \Sigma, \Delta', s_0') \text{ für} \\ S' &:= S \times 2^S, \\ s_0' &:= (s_0, \{s_0\}), \\ \Delta'((s,U),a) &:= \{(s', U \cup \{s'\}) \mid s' \in \Delta(s,a)\} \text{ und} \\ F &:= \{(s, S') \mid s \in S \text{ und } \exists D \in \mathcal{F} : S' \subseteq D\}. \end{aligned}$$

B arbeitet genau wie A, hält in der zweiten Komponente seiner Zustände aber fest, welche Zustände A bisher bereits berührt hat. Offensichtlich gilt:
$r = s_0 a_1 s_1 a_2 ... a_n s_n$ ist run in A vom Startzustand aus
$\iff r' = (s_0, U_0) a_1 (s_1, U_1) a_2 ... a_n (s_n, U_n)$ ist run in B vom Startzustand aus mit $U_0 = \{s_0\}$ und $U_{i+1} = U_i \cup \{s_{i+1}\}$.
Insbesondere gilt damit $U_0 \subseteq U_1 ... \subseteq U_i ...$ und die Folge der U_i wird bei einem unendlich langen run stationär. D.h. $\exists n : \forall i > n : U_i = U_n$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} & w \in L_{1'}((A, \mathcal{F})) \\ & \qquad \iff \exists r \in Run_{s_0}^A(w) : \exists D \in \mathcal{F} : Zu(r) \subseteq D \\ & \qquad \iff \exists r \in Run_{s_0}^B(w) : Zu(r') \subseteq F \\ & \qquad \iff \exists r' \in Run_{s_0}^B(w) : Inf(r') \subseteq F \\ & \qquad \iff \exists r' \in Run_{s_0}^B(w) : Inf(r') \cap F \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Damit gilt insbesondere

$$L_{1'}((A, \mathcal{F})) = L_{1'}((B, F)) = L_{2'}((B, f)) = L_2((B, F)).$$

Also haben wir auch

$$Rat_{1'} \subseteq Rat_{2'} \cap Rat_2 \text{ und}$$
$$Rat_{1'}^d \subseteq Rat_{2'}^d \cap Rat_2^d$$

mit bewiesen.

Zu $i = 3$: Es ist $K = \{a^\omega, b^\omega\}$ eine ω-reguläre Sprache und damit in $Rat_3 = Rat_3^d$. Wir wollen zeigen, dass K von keinem Büchi-Automaten 3-akzeptiert werden kann. Wir nehmen also die Existenz eines Automaten $A = (S, \Sigma, \Delta, s_0)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$ und einer Teilmenge $F \subseteq S$ an mit

$$K = L_3(A, F) = \{w \in \Sigma^\omega \mid \exists r \in Run_{s_0}(w) : Inf(r) = F\}.$$

Es seien r_a und r_b zwei runs mit $\beta(r_a) = a^\omega, \beta(r_b) = b^\omega$ und $Inf(r_a) = Inf(r_b) = F$. Insbesondere kann man von jedem Zustand in F sowohl einen a- als auch b-Übergang durchführen. Also existiert zu jedem $s \in F$ ein $n_a > 0$ und ein $n_b > 0$ mit

$$r_a = r_a[n_a]r'_a, \;\; r_b = r_b[n_b]r'_b$$

für r'_a, r'_b geeignet, wobei $r_a[n_a]$ und $r_b[n_b]$ beide im Zustand s enden. Damit wird auch $r[n_a]r'_b$ 3-akzeptiert, allerdings mit einer Beschriftung in $a^+b^\omega \notin K$.

■

Im letzten Beweis wurde folgendes Lemma mit gezeigt:

Lemma 5.1 *Es gilt*

- $Rat_{1'} \subseteq Rat_{2'}$,
- $Rat_{1'} \subseteq Rat_{2}$,
- $Rat^d_{1'} \subseteq Rat^d_{2'}$,
- $Rat^d_{1'} \subseteq Rat^d_{2}$,
- $Rat_{2'} \subseteq Rat_{1}$.

Es gilt folgendes einfaches

Lemma 5.2 *Zu jedem Muller-Automaten A existiert ein Büchi-Automat B mit $L_1(A) = L_1(B) = L_2(B) = L_{2'}(B)$. Ist A determiniert, so kann auch B determiniert gewählt werden.*

Beweis: O.E. sei $A = (S, \Sigma, \Delta, s_0, F)$ ein 1-dimensionaler Muller-Automat. Ein run $r \in Run^A_{s_0}(w)$ wird von A 1-akzeptiert, falls ein Zustand aus F mindestens einmal berührt wird. Dies merkt sich der Automat B wie folgt: Wir definieren

$$\begin{aligned}
B &:= (S \times \{0,1\}, \Sigma, \Delta', s'_0, F') \text{ mit}\\
s'_0 &:= (s_0, 0), \text{ falls } s_0 \notin F, \text{ und}\\
s'_0 &:= (s_0, 1), \text{ falls } s_0 \in F,\\
\Delta'((s,i),a) &:= \{(s',j) \mid s' \in \Delta(s,a) \text{ und } j = 1 :\Longleftrightarrow (i = 1 \vee s' \in F)\},\\
F' &:= S \times \{1\}.
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
w \in L_1(A) &\Longleftrightarrow \exists r \in Run^A_{s_0}(w) : Zu(r) \cap F \neq \emptyset\\
&\Longleftrightarrow \exists r \in Run^B_{s_0}(w) : Zu(r) \cap F' \neq \emptyset\\
&\Longleftrightarrow \exists r \in Run^B_{s_0}(w) : Inf(r) \cap F' \neq \emptyset\\
&\Longleftrightarrow \exists r \in Run^B_{s_0}(w) : Inf(r) \subseteq F',
\end{aligned}$$

also $L_1(A) = L_1(B) = L_2(B) = L_{2'}(B)$. Ist A determiniert, so auch B.

■

Satz 5.2 Verband der Rat_i-Klassen

$$\boxed{Rat_{1'} \subsetneq Rat_1 = Rat_{2'} \subsetneq Rat_2 = Rat_3.}$$

Beweis: $Rat_{1'} \subseteq_{L.5.1} Rat_{2'} \subseteq_{L.5.1} Rat_1 \subseteq_{L.5.2} Rat_{2'} = Rat_1 \subseteq_{L.5.2} Rat_2 =_{Hauptsatz} Rat_3$.
Zur Echtheit der Inklusionen:
1. Nach dem letzten Beispiel liegt $K := \Sigma^\omega - b^\omega$ für $\Sigma := \{a, b\}$ in Rat_1. K kann aber nicht in $Rat_{1'}$ liegen kann. Denn sonst muss ein 1-dimensionaler Muller-Automat $A = (S, \Sigma, \Delta, s_0, F)$ existieren mit $K = L_{1'}(A)$. Wegen

$$b^n a^\omega \in K \;\; \forall n$$

existiert damit für n groß genug ein run

$$r \in Run^A_{s_0}(b^n a^\omega) \text{ mit } Zu(r) \subseteq F \text{ und}$$

Zahlen $n_1 < n_2$ mit

$$r[n_1] \text{ und } r[n_2] \text{ enden beide auf } s \text{ und } \beta(r[n_2]) \in b^*.$$

Es sei $r[n_2] = r[n_1]r'$ für r' geeignet, dann gilt auch

$$r'' := r[n_1](r')^\omega \text{ ist ein run in } Run^A_{s_0} \text{ mit } Zu(r'') \subseteq Zu(r[n_2]) \subseteq F,$$

also auch r'' wird 1'-akzeptiert von A, aber mit einer Beschriftung

$$\beta(r'') = b^\omega \notin K.$$

2. $K := (a^*b)^\omega$ liegt in Reg^ω und mit dem Hauptsatz damit auch in Rat_2. Nehmen wir an, K liege auch in Rat_1. Dann existiert ein Büchi-Automat $A = (S, \Sigma, \Delta, s_0, F)$ mit $K = L_1(A)$. Für $n > |S|$ existiert ein run

$$r_n \in Run^A_{s_0} \text{ mit } \beta(r) = (a^n b)^\omega \text{ und } Zu(r) \cap F \neq \emptyset.$$

Es sei $r = r[k]r'$ und $r[k]$ ende in F. In r' kommt ein Teilrun r_a mit Beschriftung a^n vor, also

$$r' = r'' r_a r'''.$$

Wegen $n > |S|$ muss r_a einen Zustand aus S zweimal berühren, also

$$r_a = r'_a r''_a r'''_a \text{ und } r''_a \text{ ist ein Kreis von einem Zustand } s' \in S \text{ nach } s'.$$

Damit wird der run

$$r^+ := r[k] r'' r'_a (r''_a)^\omega :$$

auch von A 1-akzeptiert r^+, aber $\beta(r^+) \in \Sigma^* a^\omega \notin K$.

■

5.2 Verband der Rat^d-Klassen

Lemma 5.3

- $Rat_1^d \subseteq Rat_2^d \subseteq Rat_3^d$,
- $Rat_1^d \subseteq Rat_{2'}^d \subseteq Rat_3^d$.

Beweis: Aus Lemma 5.1 folgt sofort $Rat_1^d \subseteq Rat_2^d \cap Rat_{2'}^d$. Aus dem Hauptsatz folgt $Rat_2^d \subseteq Rat_2 = Rat_3^d$. Mit Satz 5.1 gilt $Rat_{2'}^d \subseteq Rat_{2'} \subseteq Rat_3 = Rat_3^d$.

■

Zu jedem Büchi-Automaten $A = (S, \Sigma, \Delta, s_0, F)$ sei $F_A := \{s \in S \mid \exists w \in \Sigma^* : \Delta(s, w) \cap F \neq \emptyset\}$ die Menge der co-erreichbaren Zustände von A. Es sei $A^+ := (S, \Sigma, \Delta, s_0, F_A)$. Dann gilt:

Lemma 5.4

- $L_{fin}(A^+) = Prae(L_{fin}(A))$,
- $L_{1'}(A^+) = adh(L_{fin}(A)$,
- $Rat_{1'}^d = adh(Reg)$.

Beweis: 1.) Ein endlicher run in A^+ erreicht genau dann einen Zustand in F_A, wenn dieser Zustand in A zu einem finalen Zustand in F fortgesetzt werden kann. Also $w \in L_{fin}(A^+) \Leftrightarrow w \in Prae(L_{fin}(A)$.
2.) $w \in L_{1'}(A^+) \Longleftrightarrow \exists r \in Run_{s_0}^{A^+}(w) : (|r| = \omega$ und $Zu(r) \subseteq F_A)$
$\Longleftrightarrow \exists r \in Run_{s_0}^{A}(w) : (|r| = \omega$ und jedes Anfangsstück von r kann nach F fortgesetzt werden)
$\Longleftrightarrow Prae(w) \subseteq Prae(L_{fin}(A))$ und $|w| = \omega \Longleftrightarrow w \in adh(L_{fin}(A))$.
3.) ist nur eine andere Formulierung von 2.).

■

Lemma 5.5 *Es sei $A = (S, \Sigma, \delta, s_0, F)$ ein determinierter Büchi-Automat mit finitärer Sprache $L := L_{fin}(A)$. Es seien $L^- := \Sigma^* - L$ das Komplement von L und A^- ein determinierter Büchi-Automat, der L^- akzeptiert. Für eine infinitäre Sprache $K \subseteq \Sigma^\omega$ sei das Komplement $K^- := \Sigma^\omega - K$. Dann gilt:*

1. $L_1(A) = L \circ \Sigma^\omega$,
2. $L_{1'}(A) = \Sigma^\omega - L^- \circ \Sigma^\omega = \Sigma^\omega - L_1(A^-) = (L_1(A^-))^-$,
3. $L_2(A) = lim(L)$,
4. $L_{2'}(A) = \Sigma^\omega - lim(\Sigma^* - lim(L^-) = \Sigma^\omega - L_2(A^-) = (L_2(A^-))^-$.

Beweis: Wir nutzen aus, dass in einem determinierten Automaten Wörter und runs übereinstimmen. Dann gilt:
1.: $L_1(A) = \{w \in \Sigma^\omega \mid \exists i : w[i] \in L\} = L \circ \Sigma^\omega$.
2.: $L_{1'}(A) = \{w \in \Sigma^\omega \mid \forall i : w[i] \in L\} = \Sigma^\omega - \{w \in \Sigma^\omega \mid \exists i : w[i] \notin L\} = \Sigma^\omega - L^- \circ \Sigma^\omega$.
3.: $L_2(A) = \{w \in \Sigma^\omega \mid Inf(s_0 w) \cap F \neq \emptyset\} = \{w \in \Sigma^\omega \mid \exists^\omega i : w[i] \in L\} = lim(L)$.
4.: $L_{2'}(A) = \{w \in \Sigma^\omega \mid Inf(s_0 w) \subseteq F\} = \{w \in \Sigma^\omega \mid \exists n : \forall i > n : w[i] \in L\} = \Sigma^\omega - \{w \in \Sigma^\omega \mid \exists^\omega i : w[i] \notin L\} = \Sigma^\omega - lim(L^-)$.

■

Diese Lemma erklärt auch die Bezeichnungsweisen $1'$ und $2'$, da $'$ historisch häufig zur Kennzeichnung des Komplements benutzt wurde. Unmittelbar aus diesem Lemma folgt

Korollar 5.1 *Es gilt*

- $Rat^d_{2'} = Cl^\cup(Reg \circ (Reg)^\omega)$,
- $Rat^d_1 = Reg \circ \Sigma^\omega$,
- $Rat^d_2 = lim(Reg)$,
- $L \in Rat^d_1 \Leftrightarrow L^- \in Rat^d_{1'}$,
- $L \in Rat^d_2 \Leftrightarrow L^- \in Rat^d_{2'}$.

Beweis: $K \in Rat^d_{2'} \iff \exists A = (S, \Sigma, \Delta, s_0, F)$ determiniert: $K = \{w \in \Sigma^\omega \mid Inf(s_0 w) \subseteq F\}$
$\iff \exists A = (S, \Sigma, \Delta, s_0, F)$ determiniert: $(w \in K \Leftrightarrow Inf(s_0 w) \subseteq F)$
$\iff \exists A = (S, \Sigma, \Delta, s_0, F)$ determiniert: $(w \in K \Leftrightarrow w \in \bigcup_{s \in Inf(s_0 w]} L_{s_0,s}(L_{s,s})^\omega)$
$\iff K \in Cl^\cup(Reg \circ (Reg)^\omega)$.
Die anderen Behauptungen folgen genauso unmittelbar aus dem vorherigen Lemma. Die Aussage $Rat^d_2 = lim(Reg)$ wurde bereits im vorhergehenden Kapitel für den Beweis des Hauptsatzes von Büchi-McNaughton gezeigt.

■

Mit den Resultaten aus dem Hauptsatz, aus Lemma 5.4 und aus Korollar **??** haben wir bereits folgenden interessanten Zusammenhang zwischen Abschlüssen $lim, adh, .^\omega$ und den Klassen Reg, Reg^ω und Rat^d_i bewiesen:

Satz 5.3 *Es gilt*

- $Rat^d_1 = Reg \circ \Sigma^\omega$,
- $Rat^d_{1'} = adh(Reg)$,
- $Rat^d_2 = lim(Reg)$,

- $Rat^d_{2'} = Cl^{\cup}(Reg \circ (Reg)^{\omega})$,
- $Rat^d_3 = Reg^{\omega}$.

Satz 5.4 (Verband der Rat^d_i-Klassen) *Die Rat^d_i-Klassen bilden den in Abbildung 5.2 gezeigten Verband, wobei die Pfeile echte Inklusion bedeuten. Weitere Inklusionsbeziehung zwischen den hier aufgeführten Klassen existieren nicht.*

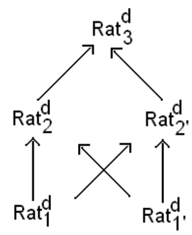

Figure 8: Verband der Rat^d_i-Klassen

Beweis: Aus Lemmata 5.1 und 5.3 folgen alle Inklusionen. Es bleibt die Echtheit zu zeigen und dass keine Inklusionen zwischen Rat^d_i und $Rat^d_{i'}$ bestehen für $i = 1, 2$. Es sei $\Sigma = \{a, b\}$.

Es gilt $K := a^*b\Sigma^{\omega} \in Reg \circ \Sigma^{\omega} = Rat^d_1 \subseteq Rat^d_2 \cap Rat^d_{2'}$. Aber es existiert kein $M \subseteq \Sigma^*$ mit $K = adh(M)$, denn: $K = lim(Prae(M)) \implies a^* \in Prae(M) \implies a^{\omega} \in adh(M)$. Also $K \notin adh(Reg) = Rat^d_{1'}$. D.h. $Rat^d_{1'} \subsetneq Rat^d_2$, $Rat^d_{1'} \subsetneq Rat^d_{2'}$ und $Rat^d_1 \nsubseteq Rat^d_{1'}$.

Es gilt $ba^{\omega} = adh(ba^*) \in adh(Reg) = Rat^d_{1'} \subseteq Rat^d_2 \cap Rat^d_{2'}$, aber $ba^{\omega} \notin Reg \circ \Sigma^{\omega} = Rat^d_1$. D.h. $Rat^d_{1'} \nsubseteq Rat^d_1$, $Rat^d_1 \subsetneq Rat^d_2$ und $Rat^d_1 \subsetneq Rat^d_{2'}$.

Es gilt $\Sigma^*ba^{\omega} = \Sigma^*b \circ adh(a^*) \in Cl^{\cup}Reg \circ adh(Reg) = Rat^d_{2'} \subseteq Rat^d_3$. Σ^*ba^{ω} lässt sich laut Lemma 1.4 nicht als $lim(M)$ für ein $M \subseteq \Sigma^*$ darstellen. D.h. $\Sigma^*ba^{\omega} \notin lim(Reg) = Rat^d_2$, also $Rat^d_{2'} \subsetneq Rat^d_3$ und $Rat^d_2 \nsubseteq Rat^d_{2'}$.

Laut Beispiel 2.1 gilt $(b^*a)^{\omega} \in Rat^d_2 \subseteq Rat^d_3$. Es gilt aber $(b^*a)^{\omega} \notin Rat^d_{2'} = Cl^{\cup}(Reg \circ adh(Reg))$, denn Annahme:

$\exists n, M_i, N_i \in Reg : (b^*a)^{\omega} = \bigcup_{1 \leq i \leq n} M_i adh(N_i)$
$\implies$ $\exists i$ in $M_i adh(N_i)$ liegen unendlich viele Wörter aus $L := \{b^{n_1}ab^{n_2}a...b^{n_i}a... \mid \forall i : n_i < n_{i+1}\}$
$\implies$ in $adh(N_i) = lim(Prae(N_i))$ liegen unendlich viele Endstücke (Suffixe) aus L, wobei $Suf(L) = L \cup aL$ gilt

$\Longrightarrow\ \exists^\omega n : (b^n \in Prae(N_i)$ oder $ab^n \in Prae(N_i)$
$\Longrightarrow\ b^\omega \in lim(Prae(N_i)) = adh(N)$ oder $ab^\omega \in adh(N_i)$
$\Longrightarrow\ \exists x \in \Sigma^* : xb^\omega \in M_i adh(N_i) \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq n} M_i adh(N_i)$, aber $xb^\omega \notin (b^*a)^\omega$.

D.h. $Rat^d_{2'} \subsetneq Rat^d_3$ und $Rat^d_2 \nsubseteq Rat^d_{2'}$.

■

5.3 Gesamtverband der Rat- und Rat^d-Klassen

Wir wollen jetzt noch die Beziehungen der Rat^d_i- mit den Rat_i-Klassen vervollständigen.

Lemma 5.6 *Es gilt*

- $Rat^d_{1'} = Rat_{1'}$,
- $Rat^d_{2'} = Rat_{2'}$.

Beweis: Es genügt $Rat_{i'} \subseteq Rat^d_{i'}$ für i=1,2 zu zeigen. Es sei $A = (S, \Sigma, \Delta, s_0, F)$ ein 1-dimensionaler indeterminierter Muller-Automat.
Zu $i = 1'$: Wir betrachten zu A eine Variante der übliche Potenzmengenkonstruktion, die einen determinierten aber nicht notwendig vollständigen Büchi-Automaten erzeugt:

$$\begin{aligned}
B &:= (S', \Sigma, \Delta', s'_0, F') \text{ mit}\\
S' &:= 2^S \cup \{s_{neu}\},\\
s'_0 &:= \begin{cases} \{s_0\} & , \quad \text{falls } s_0 \in F\\ s_{neu} & , \quad \text{sonst} \ , \end{cases}\\
F' &:= \{U \subseteq S \mid U \cap F \neq \emptyset\},\\
\Delta'(U,a) &:= F \cap \bigcup_{s\in U} \Delta(s,a).
\end{aligned}$$

Im Zustand s_{neu} ist kein Übergang möglich. s_{neu} wird nur formal gebraucht, da jeder Automat einen Startzustand besitzen muss. Damit gilt:

$w \in L_{1'}(B) \Longleftrightarrow Zu(s'_0 w) \subseteq F'$
$\Longleftrightarrow$ in $\sigma(s_0 w)$ kommen nur (Potenzmengen-) Zustände vor, die in F liegen
$\Longleftrightarrow$ es existiert ein run in $Run^A_{s_0}(w)$, der sich nur in F bewegt
$\Longleftrightarrow w \in L_{1'}(A)$.

B kann nun mit der Einführung eines Zustandes s_{tot} vervollständigt werden.

Zu $i = 2'$: Da wir auch endlich oft außerhalb von F laufen dürfen, wird die Konstruktion etwas aufwändiger. Die runs, die F verlassen, können nicht einfach ignoriert werden. Wir konstruieren zu A den determinierten Büchi-Automaten

$$\begin{array}{rcl} B' & := & (S', \Sigma, \Delta', s'_0, F') \text{ mit} \\ S' & := & 2^S \times 2^S, \\ s'_0 & := & (\{s_0\}, \{s_0\} \cap F), \\ F' & := & 2^S \times (2^S - \{\emptyset\}), \\ \Delta'((U,V),a) & := & \{(U',V')\} \text{ für } U,V \subseteq S, a \in \Sigma \text{ mit} \\ U' & := & \bigcup\limits_{s \in U} \Delta(s,a) \text{ und} \\ V' & := & \left\{ \begin{array}{ccl} F \cap U' & , & \text{für } V = \emptyset \\ F \cap \bigcup_{s \in V} \Delta(s,a) & , & \text{sonst} \end{array} \right. . \end{array}$$

Damit gilt

$$\begin{array}{rcl} w \in L_{2'}(B') & \Longleftrightarrow & Inf(s'_0 w) \subseteq F' \\ & \Longleftrightarrow & Inf(s'_0 w) \subseteq F' \\ & \Longleftrightarrow & \text{in } \sigma(s_0 w) \text{ ist ab einer Stelle die zweite Zustandskomponente} \\ & & \text{stets ungleich } \emptyset \\ & \Longleftrightarrow & \text{es existiert ein run in } Run^A_{s_0}(w)\text{, der ab einer Stelle sich nur} \\ & & \text{in } F \text{ bewegt} \\ & \Longleftrightarrow & w \in L_{2'}(A). \end{array}$$

■

Es sei noch bemerkt, dass im letzten Lemma die Konstruktion von B' allein gereicht hätte, da auch $w \in L_{1'}(B') \Leftrightarrow w \in L_{1'}(A)$ gilt.

Insgesamt haben wir folgendes erreicht: Satz 5.4 zeigt, welche Inklusionsbeziehungen zwischen den determinierten Klassen gelten gelten. Der Hauptsatz von Büchi-McNaughton zeigt Gleichheiten zu Rat_3^d auf. $Rat_2^d = lim(Reg)$ ist in Lemma 2.2 gezeigt. $Rat_1^d = Reg \circ \Sigma^\omega$ ist in Korollar 5.1 gezeigt. $Rat_1 =_{S.5.2} Rat_{2'} =_{L.5.6} Rat_{2'}^d =_{K.5.1} Cl^{\cup}(Reg \circ (Reg)^\omega))$ ordnet $Rat_{2'}^d$ ein, und $adh(Reg) =_{L.5.4} Rat_1^d =_{L.5.6} Rat_1$. Damit ist der folgende Satz über den Gesamtverband der Beziehungen im ω-Regulärem bereits bewiesen.

Satz 5.5 (Gesamtverband der Rat_i- und Rat_i^d-Klassen) *Die Rat_i- und Rat_i^d-Klassen bilden den Verband aus Abbildung 9, wobei die Pfeile echte Inklusion bedeuten. Weitere Inklusionsbeziehung zwischen den hier aufgeführten Klassen existieren nicht.*

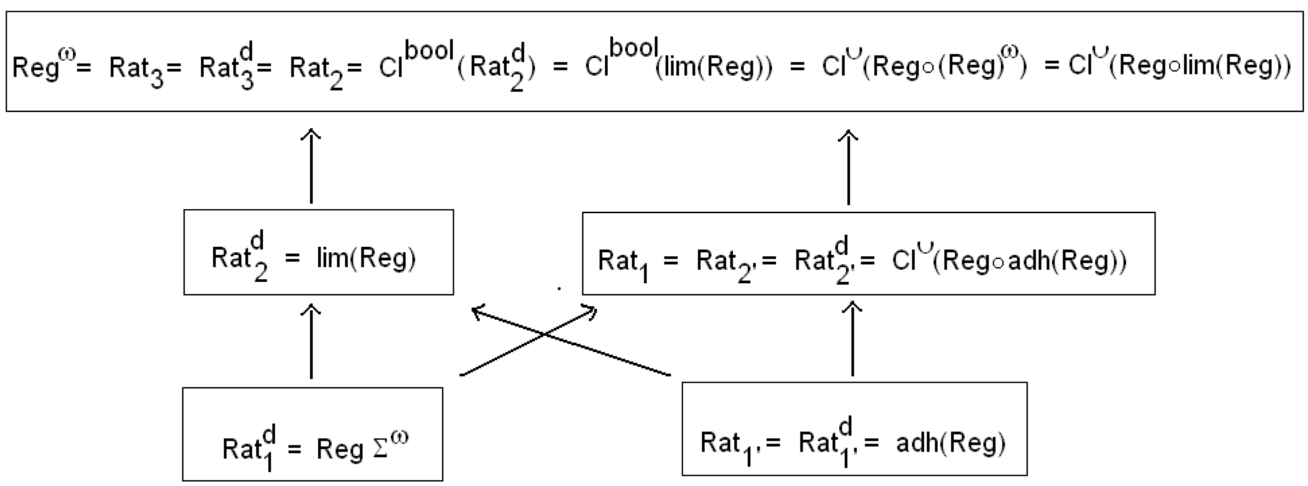

Figure 9: Gesamtverband

6 Topologische Eigenschaften von Σ^∞ und Σ^ω

6.1 Topologie und Metrik

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (T, d) von einer Menge T und einer Abbildung

$$d : T \times T \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

mit den Eigenschaften $\forall x, y, z \in T$

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung).

d mit diesen Eigenschaften heißt auch *Distanz* oder *Metrik* (auf T). Gilt zusätzlich

- $d(x, y) \leq max(d(x, z), d(y, z))$ (strenge Dreiecksungleichung),

so heißt d auch *Ultrametrik*.

Es seien (T, d) ein metrischer Raum und $x \in T, M \subseteq T$.

$$U(x, 1/n) := \{y \in T \mid d(x, y) < 1/n\}$$

heißt *offene Kugel* vom Radius $1/n$ um x. M heißt *offen* falls gilt

$$\forall x \in M : \exists n \in \mathbb{N}_+ : U(x, 1/n) \subseteq M.$$

Ein Punkt $x \in M$ heißt *isoliert* falls gilt

$$\exists n \in \mathbb{N}_+ : U(x, 1/n) = \{x\}.$$

x heißt *Häufungspunkt* von M falls gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ : \exists y \in M \cap U(x, 1/n) : y \neq x.$$

$HP(M)$ ist die Menge aller Häufungspunkte von M. M heißt *abgeschlossen*, falls jeder Häufungspunkt von M bereits in M liegt.

$$M^a := M \cup HP(M)$$

heißt der *toplogische Abschluss* von M. T heißt *beschränkt* falls gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ : \exists M_n \subseteq T : M_n \text{ ist endlich und } T = \bigcup_{x \in M_n} U(x, 1/n).$$

Eine Folge $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ mit $x_i \in T$ für alle i heißt *Cauchy-Folge* in T falls gilt

$$\forall n : \exists k_n : \forall i, j \geq k_n : d(x_i, x_j) < 1/n.$$

Eine Cauchy-Folge $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ *konvergiert* gegen ein $y \in T$ falls gilt

$$\forall n : \exists k_n : \forall i \geq k_n : d(x_i, y) < 1/n.$$

In diesem Fall schreibt man auch

$$y = lim_{i\to\omega} x_i.$$

T heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge in T gegen ein Element in T konvergiert. T heißt *kompakt*, falls zu jeder unendlichen Menge $\mathcal{X}$ von offenen Teilmengen von T mit $T = \bigcup_{M\in\mathcal{X}} M$ eine endliche Teilmenge $\mathcal{X}'$ von $\mathcal{X}$ existiert mit $T = \bigcup_{M\in\mathcal{X}'} M$.

Generell gilt in metrischen Räumen (T, d):

- jede offen Kugel ist eine offene Menge,
- die Vereinigung beliebig vieler (auch unendlich vieler) offener Mengen ist wieder offen,
- der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist wieder offen,
- der Durchschnitt beliebig vieler (auch unendlich vieler) abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen,
- die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen,
- das Komplement einer offenen Menge ist abgeschlossen,
- das Komplement einer abgeschlossenen Menge ist offen,
- M^a ist stets abgeschlossen,
- M ist genau dann abgeschlossen wenn $M = M^a$ gilt,
- T ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in T eine konvergente Teilfolge besitzt,
- T ist genau dann kompakt, wenn T vollständig und beschränkt ist.

Man kann Topologien auch abstrakter ohne Metriken einführen. Ein Topologischer Raum $(X, \mathcal{D})$ ist dann eine Menge X zusammen mit einer *Topologie* $\mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ ist eine Menge von Teilmengen von X mit der Eigenschaft, dass die leere Menge und X selbst sowie eine beliebige, auch unendliche, Vereinigung und ein endlicher Durchschnitt von Mengen in $\mathcal{D}$ wieder in $\mathcal{D}$ liegen. Die Mengen in $\mathcal{D}$ werden offen genannt, ihre Komplemente abgeschlossen. Liegt eine Metrik vor, so erfüllen die offenen Mengen der Metrik gerade diese Forderungen. Jede Metrik definiert also eine Toplogie. Wir untersuchen hier mit Σ^∞ und Σ^ω nur spezielle Topologische Räume, die von einer Metrik, sogar von einer Ultra-Metrik, erzeugt werden.

Die *abzählbare Vereinigung* und der *abzählbare Durchschnitt* eines Mengensystems $\mathcal{F}$ von Teilmengen von X ist

$$\bigcup^{\omega} \mathcal{F} := \{U \mid \forall i \in \mathbb{N}_+ : \exists U_i \in \mathcal{F} : U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_+} U_i\},$$

$$\bigcap^{\omega} \mathcal{F} := \{U \mid \forall i \in \mathbb{N}_+ : \exists U_i \in \mathcal{F} : U = \bigcap_{i \in \mathbb{N}_+} U_i\}.$$

Die *Borel-Hierarchie* auf X ist wie folgt definiert

- $G_1(X) := \{U \in X \mid U \text{ ist offen}\}$,
- $F_1(X) := \{U \in X \mid U \text{ ist abgeschlossen}\}$,
- $F_0(X) := G_0(X) := F_1(X) \cap G_1(X)$, und für $i > 0$ ist
- $G_{2i}(X) := \bigcap^\omega G_{2i-1}(X)$, $\qquad G_{2i+1}(X) := \bigcup^\omega G_{2i}(X)$,
- $F_{2i}(X) := \bigcup^\omega F_{2i-1}(X)$, $\qquad F_{2i+1}(X) := \bigcap^\omega F_{2i}(X)$.

$G_i(X)$ entsteht also aus den offenen Mengen von X durch i-maliges abwechselndes Anwenden der Operationen $\bigcup^\omega$ und $\bigcap^\omega$, beginnend mit $\bigcap^\omega$. $F_i(X)$ entsteht aus den abgeschlossenen Mengen von X durch i-maliges abwechselndes Anwenden der Operationen $\bigcup^\omega$ und $\bigcap^\omega$, beginnend mit $\bigcup^\omega$. Das folgende Korollar ist eine relativ einfache direkte Folgerung aus den Definitionen.

Korollar 6.1 *Für alle $i > 0$ gilt*

- *G_{2i} und F_{2i+1} sind abgeschlossen gegen endliche Vereinigung und abzählbaren Durchschnitt,*
- *G_{2i+1} und F_{2i} sind abgeschlossen gegen endlichen Durchschnitt und abzählbare Vereinigung,*
- *$G_i \cup F_i \subseteq G_{i+1} \cap F_{i+1}$,*
- *das Komplement einer G_i- (bzw F_i) -Menge ist eine F_i- (bzw. G_i-) Menge,*
- *$G_i \cap F_i$ ist abgeschlossen gegen Komplement, abzählbare Vereinigung und abzählbaren Durchschnitt.*

6.2 Topologische Eigenschaften von Σ^∞

Es sei

$$d : \Sigma^\infty \times \Sigma^\infty \to [0,1]$$

definiert $\forall x, y \in \Sigma^\infty$ als

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & , \quad \text{falls } x = y, \\ 1/(n+1) & , \quad \text{falls } x[n+1] \neq y[n+1] \text{ und } x[n] = y[n]. \end{cases}$$

d ist eine Ultrametrik auf Σ^∞. Die strenge Dreiecksungleichung sieht man leicht, denn

$$x[n] = z[n] \text{ und } y[m] = z[m] \text{ impliziert } x[min(m,n)] = y[min(m,n)], \text{ also}$$

$$d(x,y) \leq max(d(x,z), d(y,z)).$$

Beispiel 6.1

$$d(aba, ab) = d(aba, abb) = 1/3, \quad d(aba, a) = 1/2, \quad d(aba, baa) = 1,$$
$$U(aba, 1/10) = \{aba\} = U(aba, 0), \quad U(aba, 1/2) = a\Sigma^\infty.$$

□

Wir betrachten im Folgenden Σ^∞ als metrischen Raum mit der obigen Ultrametrik d. Offensichtlich gilt

$$U(x, 1/n) = \begin{cases} x[n]\Sigma^\infty & , \quad \text{für } |x| \geq n \\ \{x\} & , \quad \text{für } |x| < n. \end{cases}$$

Damit sind alle finitären Wörter aus M^{fin} isoliert und es gilt

$$HP(M) \subseteq M^\omega.$$

Ferner gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\Sigma^\omega = \{x \in \Sigma^* \mid |x| < n\} \cup \Sigma^n\Sigma^\infty = \bigcup_{x \in M_n} U(x, 1/n) \text{ mit}$$

$$M_n := \{x \in \Sigma^* \mid |x| \leq n\} \text{ ist endliche Menge.}$$

Also ist Σ^∞ ein beschränkter metrischer Raum.

Lemma 6.1 *Für $K \subseteq \Sigma^\infty$ gilt im Allgemeinen:*

1. $HP(K) \subseteq adh(K) \not\subseteq HP(K)$
2. $adh(K) - K \subseteq HP(K)$

3. $K^a = K \cup adh(K)$

Beweis. 1.: $x \in HP(K) \implies \forall n : \exists y \in K : (y \neq x$ und $d(x,y) < 1/n) \implies Prae(x) \subseteq Prae(K) \implies x \in adh(K)$. K^{inf} kann isolierte Punkte besitzen, die dann nicht Häufungspunkt sein können aber zur Adherence von K gehören.

2.: $x \in adh(K) - K \implies |x| = \omega$ und $Prae(x) \subseteq Prae(K)$ und $x \notin K \implies \forall n : \exists y \in K : x[n] = y[n]$ und $y \neq x \implies x \in HP(K)$.

3.: $K^a = K \cup HP(K) \subseteq K \cup adh(K) = K \cup (adh(K) - K) \subseteq K \cup HP(K)$.

■

Satz 6.1 *Für* $K \subseteq \Sigma^\infty$ *gilt*

- K *ist offen* $\iff \exists$ *finitäre Sprachen* $M, N \subseteq \Sigma^*$*:*

$$K = M\Sigma^\infty \cup N.$$

- K *ist abgeschlossen* $\iff adh(K) \subseteq K$

Beweis. 1.: "$\Longleftarrow$": $N \subseteq \Sigma^* \implies \forall x \in N : U(x, 1/(|x|+1)) = \{x\} \subseteq N$, also ist N offen. Ebenso ist $x[n]\Sigma^\infty$ als offene Kugel selbst offen, und beliebige (auch unendliche) Vereinigungen offener Mengen sind stets offen, also auch $M\Sigma^\infty$.
"$\Longrightarrow$": K offen $\implies \forall x \in K : \exists n_x : U(x, 1/n_x) \subseteq K \implies K = \bigcup_{x \in K} U(x, 1/n_x) = N \cup M\Sigma^\infty$, für M, N geeignet.
2.: K ist abgeschlossen $\iff K = K^a \iff K = K \cup adh(K) \iff adh(K) \subseteq K$.

■

Satz 6.2 (Σ^∞, d) *ist kompakt.*

Beweis: Wir haben schon gesehen, dass Σ^∞ beschränkt ist. Ferner ist Σ^∞ vollständig: Sei $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}_+}$ eine Cauchy-Folge, d.h. $\forall n : \exists k_n : \forall i, j \geq k_n : u_i[n] = u_j[n]$. Betrachte die Teilfolge $\{u_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}_+}$ mit $u_{k_1}[1] \leq u_{k_2}[2] ... \leq u_{k_n}[n] \leq ....$
Fall 1: Diese Folge wird stationär, d.h. $\exists N : \forall n \geq N : u_{k_n} = u_{k_N}$. Dann gilt offensichtlich $u_{k_N} = lim_{i \to \omega} u_i$.
Fall 2: $lim_{i \to \omega} |u_{k_i}| = \omega$, dann existiert $w := lim^{\rightarrow} u_{k_i}$ und $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}_+}$ konvergiert gegen w wegen: $\forall n : \exists k_n \ \forall i \geq k_n : (d(u_i, u_{k_n}) < 1/n$ und $d(u_{k_n}, w) < 1/n)$, d.h. $d(u_i, w) \leq max(d(u_i, u_{k_n}), d(u_{k_n}, w)) < 1/n$.

■

6.3 Topologische Eigenschaften von Σ^ω

Wir versehen Σ^ω als Teilmenge von Σ^∞ mit der gleichen Metrik d.

Satz 6.3 *Σ^ω ist abgeschlossen und kompakt.*

Beweis: Da jeder Häufungspunkt in Σ^ω liegt, ist Σ^ω abgeschlossen. Abgeschlossene Teilräume eines kompakten Raumes sind stets selbst kompakt.

$\blacksquare$

Satz 6.4 *Für $K \subseteq \Sigma^\omega$ gilt*

1. *K ist offen $\iff \exists M \subseteq \Sigma^* : K = M\Sigma^\omega$*
   $\iff \exists M \subseteq \Sigma^* : M$ ist minimal und $K = M\Sigma^\omega$,

2. *K ist abgeschlossen $\iff adh(K) \subseteq K \iff K = adh(K) \iff \exists M \subset \Sigma^* : K = adh(M)$,*

3. *K ist offen und abgeschlossen $\iff \exists M \subseteq \Sigma^* : M$ ist endlich und $K = M\Sigma^\omega$.*

Beweis: Wir nutzen Satz 6.1 und dass $\Sigma^\omega \subset \Sigma^\infty$ gilt. Damit ist 1. klar.

2.: Die letzte "$\Longleftarrow$"-Richtung sieht man wie folgt: $K = adh(M) \implies adh(K) = adh(adh(M)) = adh(M) = K$.
3.: K offen und abgeschlossen $\iff \exists M \subseteq \Sigma^*$, M ist minimal und $K = M\Sigma^\omega$ und $K = adh(K)$
$\iff \exists M \subseteq \Sigma^*$, M ist minimal und $K = M\Sigma^\omega = adh(M\Sigma^\omega) = adh(M) \cup M adh \Sigma^\omega = adh(M) \cup M\Sigma^\omega$
$\iff adh(M) \subseteq M\Sigma^\omega \iff M$ ist endlich.
Die letzte Äquivalenz sieht man wie folgt: M endlich $\implies adh(M) = \emptyset \subseteq M\Sigma^\omega$. Umgekehrt: $adh(M) \subseteq M\Sigma^\omega$ und $adh(M) \cap M\Sigma^\omega = \emptyset$ (wegen der Minimalität von M) impliziert $adh(M) = \emptyset$, woraus die Endlichkeit von M nach Satz 1.1 folgt.

$\blacksquare$

Satz 6.5 *Es seien*

$$2^{\Sigma^*}_{fin} := \{U \subseteq \Sigma^* \mid U \text{ ist endlich}\},$$

$$2^{\Sigma^*}_{min} := \{U \subseteq \Sigma^* \mid U \text{ ist minimal}\},$$

so gilt

- *$G_0(\Sigma^\omega) = F_0(\Sigma^\omega) = 2^{\Sigma^*}_{fin} \circ \Sigma^\omega$,*
- *$G_1(\Sigma^\omega) = 2^{\Sigma^*}_{min} \circ \Sigma^\omega$,*
- *$F_1(\Sigma^\omega) = adh(2^{\Sigma^*})$,*
- *$G_2(\Sigma^\omega) = lim(2^{\Sigma^*})$.*

Beweis. Die ersten drei Aussagen sind nur Umformulierungen von Satz 6.4. Zur letzten Aussage:
"$\supseteq$": Sei $A \in lim(2^{\Sigma^*})$, so existiert ein $M \subseteq \Sigma^* : A = lim(M)$. Mit Lemma 1.5 gilt

$$lim(M) = \bigcap_i (min^i(M) \circ \Sigma^\omega) \quad \in G_2(\Sigma^\omega).$$

"$\subseteq$": $A \in G_2(\Sigma^\omega) \implies \forall i : \exists A_i \subseteq \Sigma^* : A_i$ offen und $A = \bigcap_{i \in \mathbb{N}_+} A_i$. Es sei

$$A'_1 := A_1, A'_{i+1} := A_{i+1} \cap A'_i,$$

so gilt für alle i:

$$A'_i \text{ ist offen }, \; A'_i \supseteq A'_{i+1}, \; A = \bigcap_i A'_i, \; \exists K_i \text{ minimal} : A'_i = K_i \circ \Sigma^\omega.$$

Dann existiert auch eine Folge $\{K'_i\}_{i \in \mathbb{N}_+}$ mit

$$K'_i \text{ minimal}, \; K'_{i+1} \cap \bigcup_{j \leq i} K'_j = \emptyset, \; A'_i = K'_i \Sigma^\omega$$

für alle i. Dies sieht man etwa durch folgendes "Gedankenexperiment":

$K'_1 := K_1$; $i := 1$;
repeat forever
    begin
    $i := i + 1$;
    while $K_i \cap \bigcup_{j<i} K'_j \neq \emptyset$
        begin
        wähle ein $x \in K_i \cap \bigcup_{j<i} K'_j$ von minimaler Länge;
        $K_i := (K_i - \{x\}) \cup \{xa \mid a \in \Sigma\}$;
        end;
    $K'_i := K_i$
    end.

Diese Art von Beweis ist nicht unüblich in der Topologie, für die Informatik aber seltsam, da er hochgradig nicht konstruktiv ist. Nicht nur, dass die äußere repeat-Schleife nicht abbricht - auch die innere while-Schleife kann unendlich lange laufen. Damit ist dieses "Gedankenexperiment" kein Algorithmus, aber es zeigt die Existenz einer solchen Folge der K'_i. Allerdings ist diese Folge hiermit nicht "konstruiert" worden.
Dass alle K'_i minimal sind, sieht man wie folgt:
Bei Betreten der while-Schleife ist K_i minimal.
Im Schritt

$$K_i := (K_i - \{x\}) \cup \{xa \mid a \in \Sigma\}$$

bleibt K_i minimal, da kein echtes Präfix von x in K_i lag und damit auch, nach Entfernen von x, kein echtes Präfix von xa in K_i liegen kann.
Ferner gilt natürlich

$$K_i' \Sigma^\omega = K_i \Sigma^\omega.$$

Da stets ein x durch eine endliche Menge von längeren Wörten ersetzt wird, ist der Prozess wohlstrukturiert und bricht ab - aber eventuell erst nach unendlich vielen Schritten.

Es sei nun $B := \bigcup_i K_i'$, so gilt

$$A = lim(B)$$

wegen

$$\begin{aligned}
w \in A &\iff w \in \textstyle\bigcap_i A_i = \bigcap_i K_i'\Sigma^\omega \\
&\iff \forall i : w \in K_i'\Sigma^\omega \\
&\iff |w| = \omega \text{ und } \forall i : \exists x_i \in K_i' : (x_i < w \text{ und } \forall j \neq i : x_j \neq x_i), \\
&\qquad (\text{wegen } K_i' \cap K_j' = \emptyset \text{ für } i \neq j) \\
&\implies \forall i : \exists j > i : \exists x_j \in K_j' : (x_j < x_{j+1} < w) \\
&\iff w \in lim(\textstyle\bigcup_i K_i') = lim(B) \\
&\iff \forall i : \exists j > i : \exists x_j \in K_j' : (x_j < x_{j+1} < w) \\
&\implies \forall i : \exists j > i : w \in K_j'\Sigma^\omega \ (= A_j) \\
&\implies w \in \textstyle\bigcap_i A_i \ (\text{wegen } A_{i+1} \subseteq A_i) \\
&\iff w \in A.
\end{aligned}$$

■

Die Aussage

$$G_2(\Sigma^\omega) = lim(2^{\Sigma^*})$$

ist also von einer ganz anderen mathematischen Natur als alle anderen Aussagen in diesem Skript über unsere Rat_i-Klassen mit zumeist konstruktiven Beweisen. Wir wollen daher nicht weiter in die "reine" Topologie ogne Bezug zu Rat_i vor dringen.

6.4 Reg^ω in der Borel-Hierarchie

Wir untersuchen nun die exakte Lage der Rat_i-Klassen in der Borel-Hierarchie. Dabei folgen wir Landweber [12] und dem Überblicksartikel von Hoogeboom, Rozenberg [2]. Es seien im Folgenden stets

$$G_i := G_i(\Sigma^\omega),\ F_i := F_i(\Sigma^\omega)$$

für $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Lemma 6.2 *Es gilt*

1. $G_1 \cap F_1 \subseteq Reg^\omega \subseteq G_3 \cap F_3$,

2. $G_1 \nsubseteq Reg^\omega \nsubseteq G_2$,

3. $F_1 \nsubseteq Reg^\omega \nsubseteq F_2$.

Beweis: 1.: $G_1 \cap F_1 =_{S.6.4} 2^{\Sigma^*}_{fin} \circ \Sigma^\omega \subseteq Reg \circ \Sigma^\omega \subseteq_{Def.} Reg^\omega =_{Hauptsatz} Cl^{bool}(lim(Reg))$ $\subseteq_{S.6.5} Cl^{bool}(G_2) \subseteq Cl^{bool}(G_3 \cap F_3) = G_3 \cap F_3$, wegen der generellen Eigenschaften der Borel-Hierarchie.
2. und 3.: $K := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_+\} \circ \Sigma^\omega$ ist offen und damit in G_1. Ann.: $K \in Reg^\omega \implies_{L.2.1} Prae(K) \in Reg \implies Prae(K) \cap a^*b^*ba = \{a^n b^m a \mid 1 < n \leq m\} \in Reg$, ein Widerspruch.
Da Reg^ω gegen Boole'sche Operationen abgeschlossen ist, liegt auch $\Sigma^\omega - K$ nicht in Reg^ω aber in F_1.
Im Lemma 1.4 wurde gezeigt, dass $L := \{a, b\}ba^\omega$ nicht $lim(M)$ für ein $M \in \Sigma^*$ ist, also mit Satz 6.5 nicht in G_2 liegt, natürlich aber in Reg^ω. Damit liegt ebenfalls $\Sigma^\omega - L$ nicht in F_2, aber ebenfalls in Reg^ω.

■

Satz 6.6 (Die Rat^d_i-Klassen in der Borel-Hierarchie) *Es gilt*

1. $Rat^d_1 = G_1 \cap Reg^\omega$,

2. $Rat^d_{1'} = F_1 \cap Reg^\omega$,

3. $Rat^d_2 = G_2 \cap Reg^\omega$,

4. $Rat^d_{2'} = F_2 \cap Reg^\omega$,

5. $Rat^d_3 = G_3 \cap F_3 \cap Reg^\omega$.

Beweis: Wegen $Rat^d_3 = Reg^\omega \subseteq G_3 \cap F_3$ folgt sofort die Aussage 5. Zu 1. bis 4.:

Die Inklusionen "$\subseteq$" sind einfach:
1.: $Rat^d_1 = Reg \circ \Sigma^\omega \subseteq 2^{\Sigma^*} \circ \Sigma^\omega \subseteq G_1$.
2.: Mit Korollar 5.1 folgt $K \in Rat^d_{1'} \iff \Sigma^\omega - K \in Rat^d_1 \iff \Sigma^\omega - K \in G_1$ und $\Sigma^\omega - K \in Reg^\omega \iff K \in F_1$ und $K \in Reg^\omega$.
3.: $Rat^d_2 = lim(Reg) \subseteq lim(2^{\Sigma^*}) = G_2$, und
4.: $K \in Rat^d_{2'} \iff \Sigma^\omega - K \in Rat^d_2 \implies \Sigma^\omega - K \in G_2 \cap Reg^\omega \iff K \in F_2 \cap Reg^\omega$.

Zu den "$\supseteq$"-Inklusionen:
1.: $K \in G_1 \cap Reg^\omega \implies \exists A = (S, \Sigma, \delta, s_o)$ determinierter Automat: $\exists \mathcal{F}$ endliche Menge von Teilmengen von S: $\exists M \subseteq \Sigma^* : K = L_3((A, \mathcal{F}))$ und $K = M \circ \Sigma^\omega$.
Es sei

$$F := \{s \in S \mid \exists u \in \Sigma^* : (\delta^*(s_0, u) = s \text{ und } u\Sigma^\omega \subseteq K)\},$$

so gilt für

$$B := (A, F) :$$

$$
\begin{aligned}
w \in K \Longrightarrow\ & Inf(s_0w) \in \mathcal{F} \text{ und } \exists n \in \mathbb{N}_+ : w[n]\Sigma^\omega \subseteq K \\
\Longrightarrow\ & \exists m \in \mathbb{N}_+ : \exists s \in S : \exists w' \in \Sigma^\omega : s_0w = s_0w[m]sw' \\
& \text{und } Inf(s_0w) = Zu(sw') \in \mathcal{F} \text{ und } s_0w[m]\Sigma^\omega \subseteq K, \text{ insbesondere ist } s \in F, \\
\Longrightarrow\ & Zu(s_0w) \cap F \neq \emptyset \\
\Longrightarrow\ & w \in L_1(B), \\
\Longrightarrow\ & Zu(s_0w) \cap F \neq \emptyset \\
\Longrightarrow\ & \exists m \in \mathbb{N}_+ : \exists s \in F : \exists w' \in \Sigma^\omega : s_0w = s_0w[m]sw' \text{ und } w[m]\Sigma^\omega \subseteq K \\
\Longrightarrow\ & w \in K.
\end{aligned}
$$

Also: $K = L_1(B) \in Rat_1^d$.

2.: Mittels des Tricks der Komplementbildung und Korollar 5.1 folgt aus $G_1 \cap Reg^\omega \subseteq Rat_1^d$ sofort $F_1 \cap Reg^\omega \subseteq Rat_{1'}^d$.

3.: $K \in G_2 \cap Reg^\omega \implies \exists A = (S, \Sigma, \delta, s_0, \mathcal{F})$ determinierter Muller-Automat: $\exists M \subseteq \Sigma^\omega$:

$$K = L_3(A) \text{ und } K = lim(M).$$

O.E. seien alle Zustände von A erreichbar. Es sei für $s \in S$

$$\mathcal{C}_s := \{Zu(su) \mid u \in \Sigma^* \text{ und } \delta_A^*(s, u) = s\}$$

die Menge aller Zustandsmengen, die von Kreisen in A von s nach s angenommen werden können.
Hilfsüberlegung: $\forall C, D \in \mathcal{C}_s : (C \in \mathcal{F} \implies C \cup D \in \mathcal{F})$.
Beweis: Seien C, D aus C_s, $C \in \mathcal{F}$, so existieren $z, u, v \in \Sigma^*$ mit

$$C = Zu(su),\ D = Zu(sv),\ \delta_A^*(s, u) = \delta_A^*(s, v) = s \text{ und } \delta_A^*(s_0, z) = s.$$

Insbesondere gilt für alle Wörter $w \in z(u + v)^* u^\omega$:

$$Inf(s_0w) = Inf(su) = C \in \mathcal{F}, \text{ d.h. } z(u + v)^* u^\omega \subseteq L_3(A) = K = lim(M).$$

Wegen $zvu^\omega \in lim(M)$ existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}_+$ und ein $u' \leq u$ mit

$$x_1 := zvu^{n_1}u' \in M. \text{ Setze } x_1' := zvu^{n_1+1}.$$

Per Induktionsvoraussetzung seien schon x_i, x_i' konstruiert mit

$$x_i \leq x_i' \in z(u + v)^*, x_i \in M \text{ und in } x_i \text{ komme } u \text{ und } v \text{ jeweils mindestens } i\text{-mal vor.}$$

Wegen $x_i'vu^\omega \in lim(M)$ existiert ein $n_i > 0$ und ein $u' \leq u$ mit

$$x_{i+1} := x_i'vu^{n_i}u' \in M \text{ und } x_{i+1} \leq x_{i+1}' := x_i'vu^{n_i+1} \in z(u + v)^*$$

und in x_{i+1} kommen u und v jeweils mindestens $i+1$-mal vor. Damit liegt auch

$$w = lim^{\rightarrow} x_i \text{ in } lim(M) = K = L_3(A)$$

mit $Inf(s_0 w) = C \cup D$. Also gilt $C \cup D \in \mathcal{F}$.

$\square$

Für $s \in S$ konstruieren wir aus $A = (S, \Sigma, \delta, s_0, \mathcal{F})$ den determinierten Büchi-Automaten

$$\begin{aligned}
B_s : &= (S', \Sigma, \delta'_s, s_0, F_s) \text{ mit} \\
S' &:= S \cup (S \times 2^S), \\
F_s &:= \{(s, \emptyset)\}, \\
\delta'_s(p,a) &:= \begin{cases} q & , \quad \text{für } \delta_A(p,a) = q \neq s \\ (s, \{s\}), & \quad \text{für } \delta_A(p,a) = s, \end{cases} \\
\delta'_s((p,U),a) &:= \begin{cases} (q, U \cup \{q\}), & \quad \text{für } \delta_A(p,a) = q \text{ mit } q \neq s \text{ oder } U \cup \{q\} \notin \mathcal{F} \\ (s, \emptyset) & , \quad \text{für } \delta_A(p,a) = s \text{ und } U \cup \{s\} \in \mathcal{F}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Damit gilt für $w \in \Sigma^\omega$

$$\begin{aligned}
w \in L_2(B_s) &\Longleftrightarrow s_0 w \in Run^{B_s} \text{ berührt unendlich oft den Zustand } (s, \emptyset) \\
&\Longleftrightarrow s_0 w \in Run^{A} \text{ erreicht unendlich oft den Zustand } s \text{ und durchläuft} \\
&\qquad \text{unendlich oft einen Kreis von } s \text{ nach } s \text{ mit Zuständen in } \mathcal{C}_s \cap \mathcal{F} \\
&\Longleftrightarrow s \in Inf(s_0 w) \text{ und } \exists n : \forall i \leq n : \exists D_i \in \mathcal{C}_s : Inf(s_0 w) = D_1 \cup .. \cup D_n \\
&\qquad \text{und } D_i \in \mathcal{F} \\
&\Longleftrightarrow s \in Inf(s_0 w) \text{ und } Inf(s_0 w) \in \mathcal{F} \\
&\Longleftrightarrow w \in L_3(A) \text{ und } s \in Inf(s_0 w).
\end{aligned}$$

Damit ist $L_3(A) = \bigcup_{s \in S} L_2(B_s) \in Rat_2^d$, da Rat_2^d gegen Vereinigung abgeschlossen ist.

4.: Mittels des Tricks der Komplementbildung und Korollar 5.1 folgt aus $G_2 \cap Reg^\omega \subseteq Rat_2^d$ sofort $F_2 \cap Reg^\omega \subseteq Rat_{2'}^d$.

$\blacksquare$

Zu der bereits genannten Literatur sind die Überblicksartikel [13] und [14] sowie die Lehrbücher [11] und [7] sowie für Kapitel 4 [15] empfehlenswert.

References

[1] L. Boasson, M. Nivat. Adherences of languages. *Journal of Computer and System Sciences*, 20:285–309, 1980.

[2] H.J. Hoogeboom, G. Rozenberg. Infinitary languages: Basic theory and applications to concurrent systems. *LNCS*, 224:265–343, 1986.

[3] J.R. Büchi. On a decision method in restricted second-order arithmetic. *Proc. of the Int. Cong. on Logic, Methodology and Philisophy of Science*, 1962. Stanford Univ. Press.

[4] D.E. Muller. Infinite sequences and finite machines. *Switching Theory and Logical Design: Proc. Fourth IEEE Ann. Symp.*, pages 3–16, 1963.

[5] S. Eilenberg. *Automata, Languages and Machines.* Academic Press, 1970.

[6] Y. Choueka. Theories of automata on ω-tapes: A simplified approach. *J. Computer Systems Sci.*, 8:117–141, 1974.

[7] D. Perrin, J.-L. Pin. *Infinite Words*, volume 141 of *Pure and Applied Mathematics.* Elsevier Science, 2004.

[8] R. McNaughton. Testing and generating infinite sequences by a finite automaton. *Information and Control*, 9:521–530, 1966.

[9] A. Arnold. A syntactic congruence for rational ω-languages. *Theor. Comp. Science*, 39:333–335, 1985.

[10] J.-P. Pecuchet. On the complementation of Büchi-automata. *Theor. Comp. Science*, 347:95–98, 1986.

[11] B. Khoussainov, A. Nerode. *Automata Theory and its Applications.* Birkhäuser, 2001.

[12] L.H. Landweber. Decision problems for ω-automata. *Math.Systems Theory*, 3:376–384, 1969.

[13] W. Thomas. Automata on infinite objects. In J. van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science*, volume B, pages 134–191. Elsevier Science, 1990.

[14] W. Thomas. Languages, automata, and logic. In G. Rozenberg, A. Salomaa, editor, *Handbook of Formal Languages*, volume 3, pages 389–455. Springer Verlag, 1997.

[15] E. Börger, E. Grädel, Y. Gurevich. *The Classical Decision Problem*. Springer Verlag, 1997.