

# Benutzer:ManfredRosendahl/Parametrische Modellierung (CAD)



Dieser Artikel ist im Entstehen und noch nicht Bestandteil der freien Enzyklopädie Wikipedia. Bedenke, dass der Text noch unvollständig sein und Fehler oder ungeprüfte Aussagen enthalten kann. Wenn du Fragen zum Thema hast, nimm am besten Kontakt mit dem Autor auf.

\_\_NICHT\_INDEXIEREN\_\_

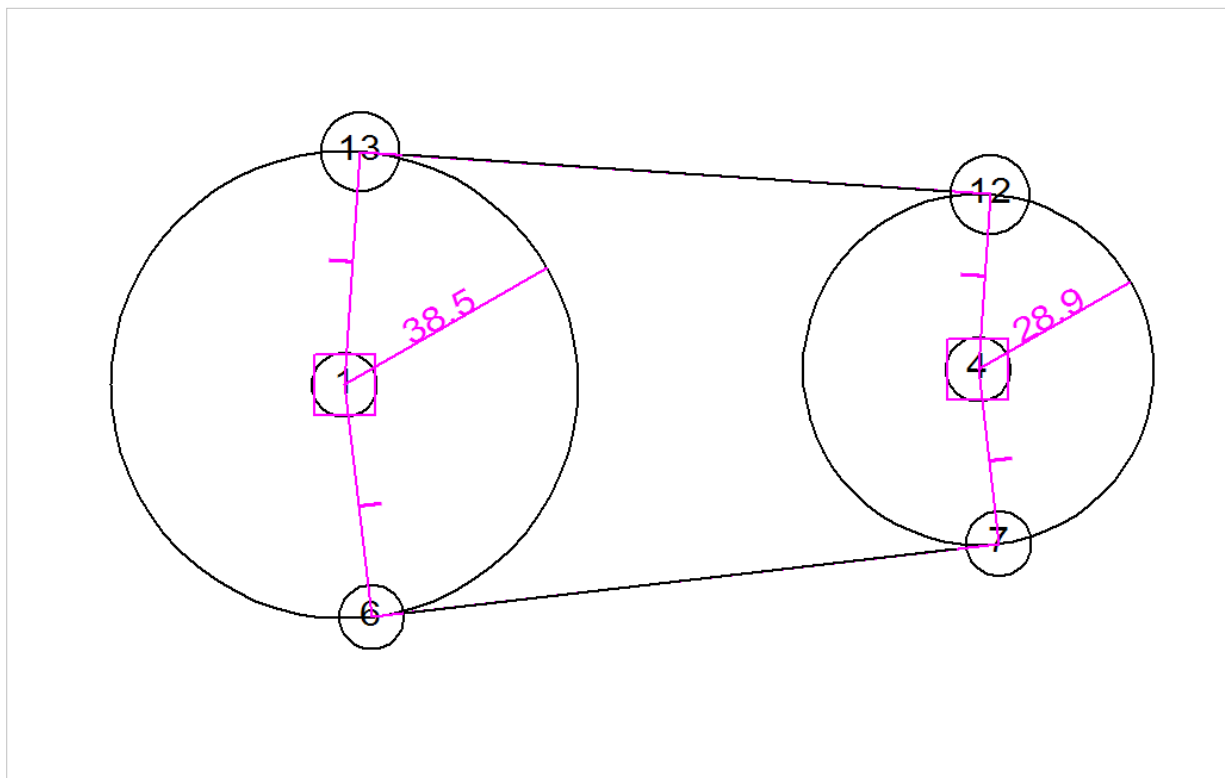
## Parametrische Modellierung (CAD)

Unter **Parametrischer Modellierung** versteht man eine Technik, die Anwendern rechnergestützt die Erstellung von geometrischen Konstruktionen ermöglicht, die später allein durch Verändern von Parametern und ohne Programmierung modifiziert werden können.

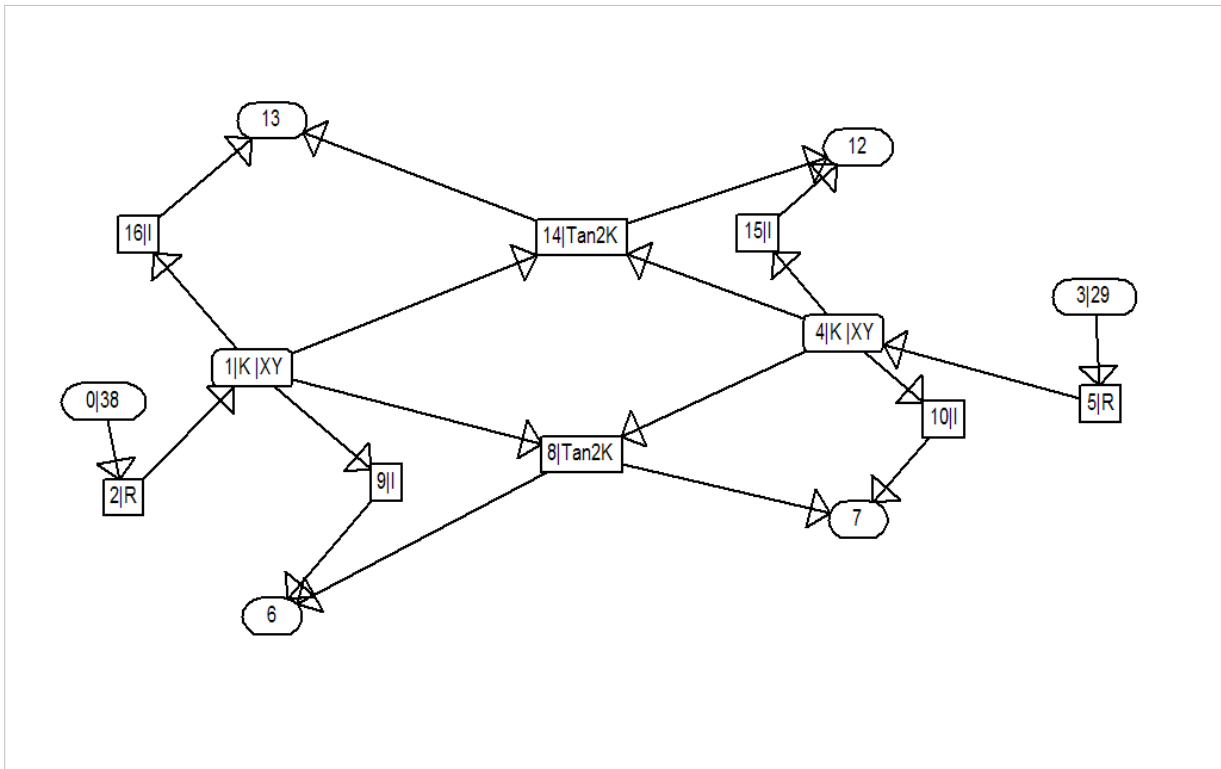
In CAD-Systemen möchte man dazu nicht nur geometrische Objekte, sondern auch funktionale Abhängigkeiten zwischen den geometrischen Objekten bzw. sonstigen Variablen, z.B. Materialkonstanten oder Belastungen, definieren. Dies geschieht mit Hilfe von so genannten Constraints. Diese können z.B. festlegen, dass der Abstand von zwei Punkten ein veränderliches Maß haben soll, oder dass zwei Linien gleichlang oder parallel sein sollen.

Die einfachste Realisierung besteht darin, dass bei der sequentiellen Konstruktion nicht nur die Geometriedaten festgehalten werden, sondern auch die jeweiligen Konstruktionsschritte. Erzeugt man bei diesem history-basierten Modellieren z.B. eine Linie als Tangente an zwei Kreisen, so hält man nicht nur die aktuellen Koordinaten fest, sondern auch die Eigenschaft der Linie, Tangente der beiden Kreise zu sein. Das erlaubt es, nach einer Änderung der Kreise die Tangente automatisch nachzuführen. Mit dem gleichen Verfahren kann man auch eine assoziative Bemaßung bzw. Schraffur realisieren.

Beispiel



Die Kreise 1 und 4 sind gegeben. Die Linien 12-13 bzw. 6-7 liegen tangential an den Kreisen 1 und 4. Ferner liegen die Punkte 6 und 13 auf dem Kreis 1 und die Punkte 7 und 12 auf dem Kreis 4. Der Graph dazu:



Bei einer Änderung des Wertes in einem Blatt, z.B. Radius eines Kreises oder Position des Mittelpunktes, kann mit Hilfe der topologischen Sortierung, der DAG neu berechnet werden. Diese topologische Sortierung kann z.B. dadurch erfolgen, dass für jede Klasse eine Methode *compute* definiert ist, die zunächst *compute* für die referierten Elemente aufruft und dann neu berechnet. Ferner wird noch festgehalten, ob ein Knoten schon neu berechnet worden ist. Für die Knoten ohne einlaufende Kanten ist *compute* leer. Vorteil der azyklischen parametrischen Modellierung ist, dass man den DAG immer direkt evaluieren kann. Im obigen Beispiel hätte man z.B. für den Punkt 13 zwei Ortslinien gegeben:

- er liegt auf einer Tangente an den Kreisen 1 und 4
- er liegt auf dem Kreis 1

Analog kann man mit den anderen Punkten verfahren.

Es ist jedoch nicht einfach möglich, etwa für die Lage des Punktes 13 eine neue Koordinate vorzugeben und die Kreise entsprechend zu verändern.

Allgemein will man nach Erstellung eines Modells frei wählen können, welche Variablen vorgegeben und welche berechnet werden. Z.B. soll nicht nur ein Punkt als Schnittpunkt von zwei Linien berechnet werden, sondern bei einer Verschiebung des Schnittpunktes sollen die Linien sich adäquat bewegen.

Um nach Erstellung eines Modells frei wählen können, welche Variablen vorgegeben und welche berechnet werden - im obigen Beispiel soll etwa ein Tangentialpunkt vorgegeben werden - so sind Techniken nötig, die nicht nur die Konstruktions-Historie benutzen, sondern geometrische Constraints. Damit ist es dann auch möglich, bei der Verschiebung eines Punktes, der als Schnittpunkt von zwei Linien definiert wurde, die Linien adäquat mitzubewegen. Auch gibt es Modelle, die überhaupt nicht sequentiell konstruiert werden können.

Solche Constraints können u.a. sein:

- Zwei Linien sind parallel
- Zwei Linien bilden einen rechten Winkel
- Zwei Linien sind gleich lang

- Ein Punkt ist Schnittpunkt von zwei Linien
- Ein Punkt liegt auf einem Kreis
- Zwei Kreise sind tangential

Die Constraints können auch Bemaßungen sein, wie z.B.

- Länge einer Linie
- Radius eines Kreises

Jedes Constraint hat eine Anzahl von Parametern und einen Freiheitsgrad.

Beispiel

Eine Linie von  $(x_1, y_1)$  nach  $(x_2, y_2)$  hat die Länge  $d$ .

Die fünf Parameter sind  $x_1, y_1, x_2, y_2$  und  $d$ . Von den fünf Parametern können vier vorgegeben werden, aus denen dann der fünfte berechnet wird. Man kann die Koordinaten vorgeben und berechnet die Länge, man kann aber auch die Länge vorgeben und daraus einen der Koordinatenwerte berechnen. Das Constraint hat damit einen Freiheitsgrad von vier oder anders formuliert, für seine Erfüllung wird ein Freiheitsgrad konsumiert.

Ein Dreieck hat sechs Freiheitsgrade, die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten der drei Punkte. Die Form des Dreiecks ist bestimmt durch die Länge der drei Seiten. Dadurch werden drei Freiheitsgrade konsumiert, es bleiben noch drei Freiheitsgrade übrig. Diese bestimmen hier die Lage des Dreiecks. Es kann noch ein Punkt vorgegeben werden und für einen zweiten Punkt etwa die  $x$ -Koordinate. Generell wird im zweidimensionalen Raum bei einer Konstruktion aus  $n$  Punkten die Form durch  $2 \cdot n - 3$  Constraints, die jeweils einen Freiheitsgrad konsumieren, festgelegt.

Die Parameter in den Constraints sind die Variablen des Modells.

Die Techniken zur Lösung dieser geometrischen Constraint-Systeme können in drei Klassen eingeteilt werden:

- Gleichungsbasierte Methoden
- Regelbasierte Techniken
- Graphbasierte Techniken

Die beiden letzten Techniken basieren auf konstruktiven Methoden.

## Gleichungsbasierte Methoden

Die Benutzung von Gleichungen zur Geometrischen Modellierung wurde bereits von Sutherland<sup>[1]</sup> eingeführt. Fortgeführt wurde sie durch die Arbeiten von Light und Gossard.<sup>[2]</sup>

Hier werden die Constraints durch i.A. nichtlineare Gleichungen zwischen den Variablen dargestellt. Die Variablen sind die skalaren Größen der Objekte, also Werte wie der Abstand zweier Punkte oder bei Punkt und Kreis  $x$ - und  $y$ -Koordinaten, beim Kreis zusätzlich der Radius  $r$ .

Ein geometrisches System ist überbestimmt, wenn es mehr Gleichungen (Constraints) als freie Variablen gibt. Das System ist vollständig bestimmt, wenn die Anzahl der Variablen gleich der Anzahl der Gleichungen ist. In dem geometrischen System sind dann alle Freiheitsgrade bestimmt. Dann ist das Gleichungssystem lösbar. Hat man weniger Gleichungen als freie Variablen, muss man entweder zusätzliche Gleichungen einführen, oder für die überzähligen Variablen feste Werte annehmen.

Gleichungen für einige geometrische Bedingungen

- Horizontaler Abstand  $d \quad x_2 - x_1 - d = 0$
- Vertikaler Abstand  $d \quad y_2 - y_1 - d = 0$
- Abstand  $d \quad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - d^2 = 0$
- Winkel der Linien von P1 nach P2 und P1 nach P3 sei  $\phi$

- Länge einer Linie von  $x_1, y_1$  nach  $x_2, y_2$  sei  $d \quad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = d^2$

- Ein Punkt  $x_1, y_1$  liegt auf dem Kreis mit Mittelpunkt  $x, y$  und Radius  $r$   $(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = r^2$
- Die Linie  $(x_1, y_1)$  nach  $(x_2, y_2)$  und die Linie  $(x_3, y_3)$  nach  $(x_4, y_4)$  seien orthogonal. Dann muss das Skalarprodukt 0 sein:

Für das nichtlineare Gleichungssystem wird entweder mit Hilfe des Newton-Raphson-Verfahren eine iterative Lösung gesucht <sup>[2]</sup> oder es wird eine algebraische Methode mit Hilfe von Gröbnerbasen benutzt <sup>[3] [4]</sup>.

Die Lösung eines Gleichungssystems zu finden ist äquivalent dem Problem, die Nullstellen einer Menge von Funktionen mit mehreren Variablen zu finden. Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass das Gleichungssystem genauso viele Variablen besitzt, wie es Gleichungen hat.

Zunächst wird der Fall betrachtet, die Nullstelle einer allgemeinen nichtlinearen Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zu finden. Wenn  $f$  stetig differenzierbar ist, kann die Stelle  $f(z)$  ausgehend von  $f(x_0)$  über ein Taylor-Polynom approximiert werden.

$$f(z) = f(x_0) + f'(x_0)(z - x_0) + R(z)$$

Unter Fortlassung des Restgliedes  $R(z)$  lässt sich mit:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$$

eine Näherung  $x_1$  für eine Nullstelle  $z$  von  $f$  berechnen:

Aus der Gleichung ergibt sich:

$$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$$

bzw. allgemein:

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$$

Die Näherung lässt sich natürlich nur berechnen, wenn die Ableitung  $f'(x_t) \neq 0$  ist und der Startwert hinreichend nahe an der Nullstelle liegt. Des Weiteren erhält man von einem Startwert ausgehend nur eine Nullstelle. Verallgemeinert man dies auf die Lösung eines Gleichungssystems  $F(X)=0$  mit  $F=(f_1, \dots, f_n)$  und  $X=(x_1, \dots, x_n)$  so erhält man die Gleichung:

$$F(X_t) + F'(X_t)(X_{t+1} - X_t) = 0$$

über die sich die Näherung  $X_{t+1}$  aus  $X_t$  berechnen lässt. Die Berechnung einer neuen Näherung erfordert die Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems:

$$F'(X_t) * \Delta X = -F(X_t)$$

$F'(X_t)$  ist die Jacobi-Matrix der Partiellen Ableitungen  $\frac{\delta f_i}{\delta x_j}$  für  $i, j=1 \dots n$  an der Stelle  $X_t$ .

$\Delta X = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$  ist der zu bestimmende Vektor aus dem sich mit  $X_{t+1} = X_t + \Delta X$  die neue Näherung berechnen lässt.  $-F(X_t)$  ist der Vektor der Restwerte, d.h. der noch vorhandenen Fehler. Das System besitzt nur dann eine Lösung, wenn die Gleichungen nicht linear abhängig sind, d.h. die Determinante  $\det F'(X_t) \neq 0$  ist. Bei komplizierten Funktionen ist es i.A. nicht möglich, die Ableitungen zu berechnen. Dann

benutzt man statt der Differentialquotienten  $\frac{\delta f_i}{\delta x_j}$  die Differenzenquotienten:

$$\frac{\Delta f_i}{\Delta x_j} = \frac{f_i(x_1, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, x_j - h, \dots, x_n)}{h}$$

um die Jacobimatrix aufzustellen.

Der Differenzenquotient  $\frac{\Delta f_i}{\Delta x_j}(X_t)$  kann dadurch erzeugt werden, indem man zunächst

$A = f_i(x_1, \dots, x_n)$  berechnet wird. Dann wird  $B = f_i(x_1, \dots, x_j + \text{delta}, \dots, x_n)$  berechnet.

$\frac{B - A}{\Delta}$  ergibt den Differenzenquotienten  $\frac{\Delta f_i}{\Delta x_j} X_t$ . Die Berechnung von A und B erfolgt durch auswerten des

Constraints, dass zu dieser Gleichung gehört.

Damit das Gleichungssystem eine Lösung hat, darf die Determinante der Jacobimatrix nicht 0 sein, da man die inverse Matrix bilden muss. Das bedeutet, die Matrix muss quadratisch sein, d.h. man hat so viele Gleichungen wie Variablen. Hat man weniger Gleichungen, muss man für einige Variablen den alten Wert benutzen. So hat man weniger Variablen. Hat man mehr Gleichungen als Variablen so ist das System überbestimmt und kann nicht gelöst werden. Aber auch, wenn die die Anzahl der Variablen und die Anzahl der Gleichungen gleich sind, kann die Matrix singular sein, wenn ein Teil der Matrix überbestimmt und ein Teil unterbestimmt ist. Dies ist z.B. dann der Fall, wenn Bedingungen redundant sind, d.h. eine Bedingung genau aus der anderen folgt. Die Zeilen der Jacobi-Matrix sind dann linear abhängig. Das Gleichungssystem kann direkt gelöst werden, wenn in der Jacobimatrix nach einer geeigneten Zeilen Permutation nur die obere oder untere Dreiecksmatrix besetzt ist. Bisweilen kann die Lösung des gesamten Gleichungssystems zurückgeführt werden auf die sequentielle Lösung von zwei Teilsystemen.

$$\begin{array}{l|l}
 | a_{1,1} \dots a_{1,n} & 0 \dots \dots \dots 0 & | x_1 = 0 \\
 | \dots \dots \dots & 0 \dots \dots \dots 0 & | \dots = 0 \\
 | a_{i,1} \dots a_{i+1,n} & 0 \dots \dots \dots 0 & | x_i = 0 \\
 | a_{i+1,1} \dots a_{i+1,n} & a_{i+1,n+1} \dots a_{i+1,m} & | x_{i+1} = b_{i+1} \\
 | \dots \dots \dots & & | \dots \\
 | a_{j,1} \dots a_{j,n} & a_{j,n+1} \dots a_{j,m} & | x_j = b_j
 \end{array}$$

Mit den ersten  $i$  Gleichungen können die Variablen  $x_1$  bis  $x_i$  gelöst werden. Diese werden in die unteren Gleichungen eingesetzt und man bekommt ein Gleichungssystem für die Variablen  $x_{i+1}$  bis  $x_j$ .

## Graphbasierte Techniken

Im Gegensatz zur Lösung durch ein Gleichungssystem versuchen die konstruktiven Methoden, eine Folge von geometrischen Konstruktionen aus den geometrischen Objekten und den Constraints zu ermitteln, sodass die Objekte die Constraints erfüllen. Hier arbeitet man entweder mit regelbasierten oder graphbasierten Techniken.

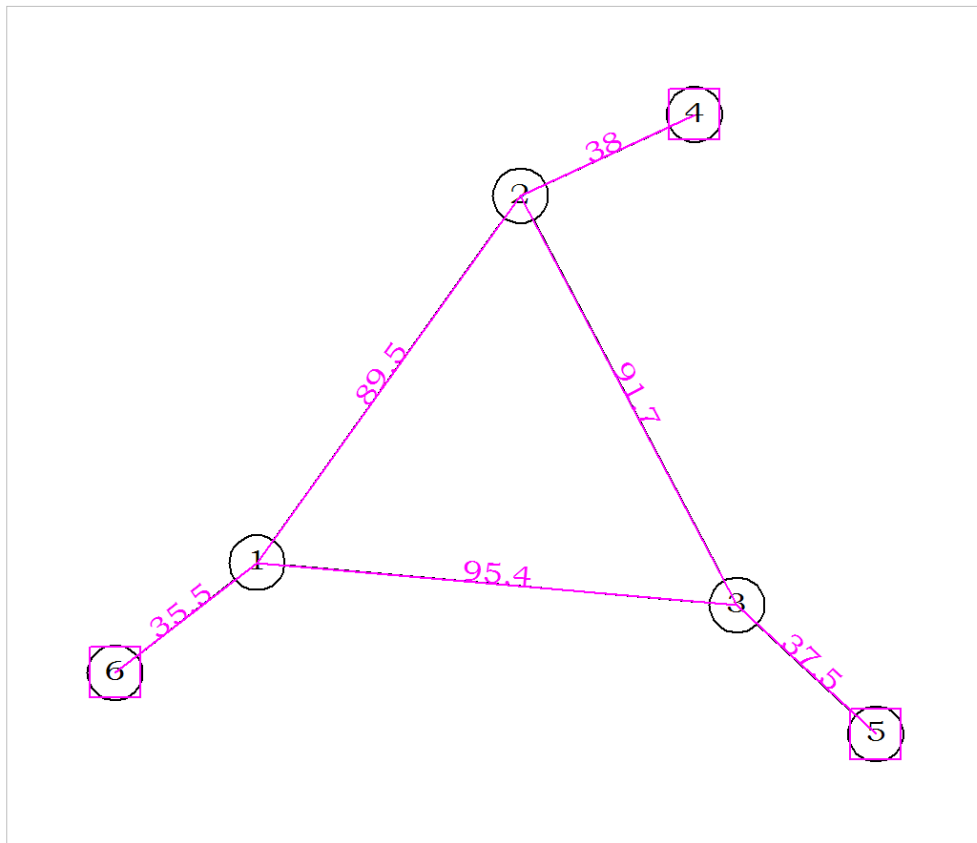
**Graphbasierte Techniken** modellieren die Constraints als Hyperkanten zwischen den geometrischen oder sonstigen Variablen. Statt mit einem Hypergraphen, kann man auch mit einem bipartiten Graphen arbeiten, bei dem jeweils Constraints und Variablen durch zunächst ungerichtete Kanten verbunden sind. Entsprechend der Anzahl der Constraints können nun aus einer gegebenen Teilmenge der Variablen die übrigen berechnet werden.

**Regelbasierte Techniken** führen zur Konstruktion von Control Sets aus Längen und Winkeln. Diese Controls Sets definieren Dreiecke oder Vierecke, die dann zur Gesamtlösung zusammengefasst werden. Bei den Dreiecken entsprechen die Regeln den verschiedenen Möglichkeiten, aus Seite und Winkeln ein Dreieck zu konstruieren.

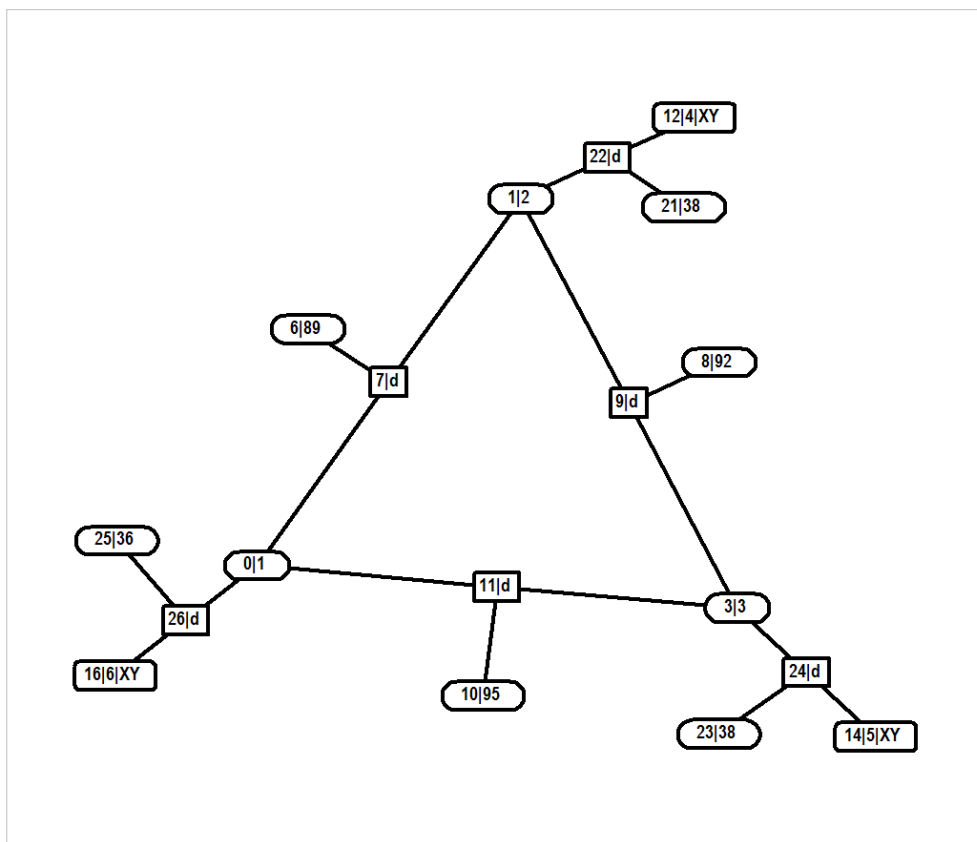
Um mit den **Graphbasierten Techniken** aus dem Modell und den festgelegten Variablen eine Berechnungsfolge zu konstruieren, wird eine Analyse der Freiheitsgrade benutzt. Ziel ist es, aus dem ungerichteten Constraint-Graphen einen gerichteten zu erzeugen. Ist eine sequentielle Berechnung möglich, soll auch ein azyklischer Graph (DAG) entstehen. In manchen Fällen, wo zyklische Abhängigkeiten bestehen, kann jedoch nur ein Graph mit Zyklen erzeugt werden. Sind zu viele Variablen festgelegt, d.h. das System ist überbestimmt, ist keine Orientierung möglich. Ansätze in dieser Richtung liefern <sup>[5], [6], [7]</sup>.

Manche Konstruktionen sind allerdings überhaupt nicht in Form eines Graphen ohne Zyklen zu modellieren.

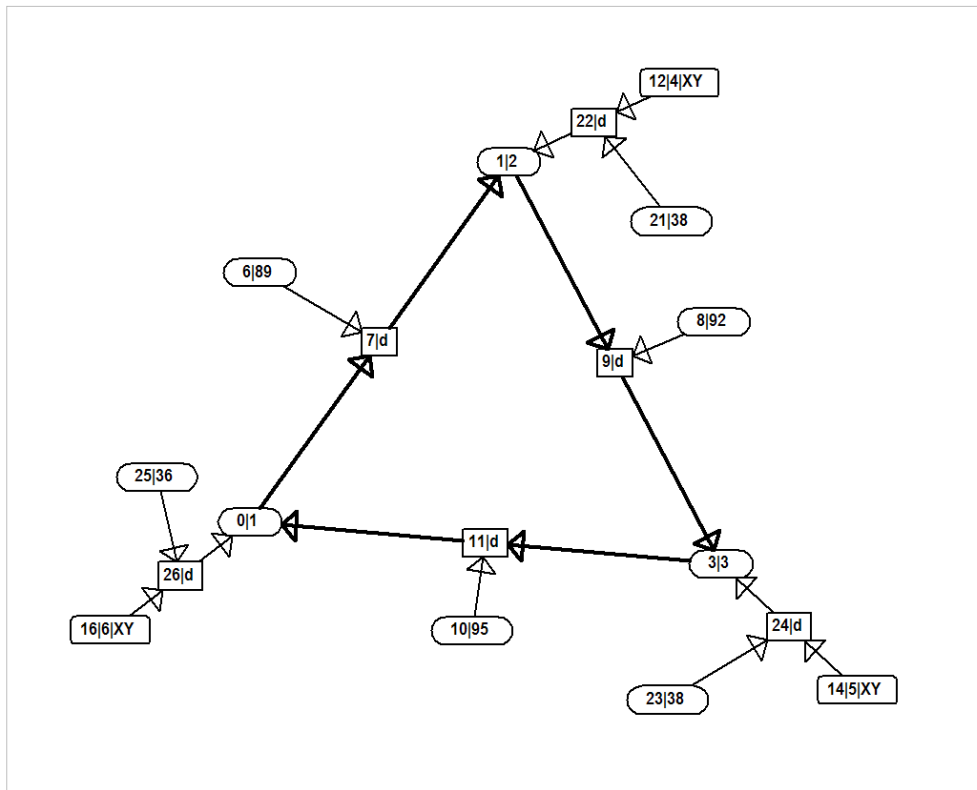
Im ersten Beispiel sind zwei Dreiecke P1, P2, P3 und P4, P5, P6 gegeben. Vom äußeren Dreieck P4, P5, P6 sind die Koordinaten gegeben. Vom inneren Dreieck sind die Seitenlängen gegeben. Das kleinere Dreieck soll so in das größere platziert werden, dass die Entfernungen (P2, P4), (P3, P5) und (P1, P6) die gegebenen Werte annehmen. Man kann sich vorstellen, dass die Dreiecke durch Schnüre verbunden sind, die stramm gezogen werden sollen.



Der entsprechende Constraint Graph hat die Form:

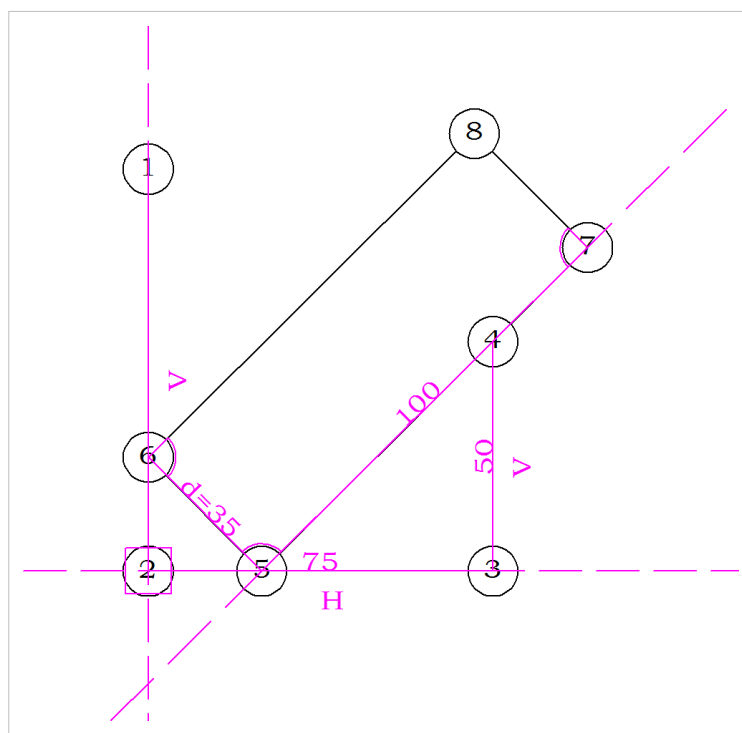


Wenn man einen Abstand oder einen der äußeren Punkte ändert, so ergibt sich folgender gerichteter Graph.

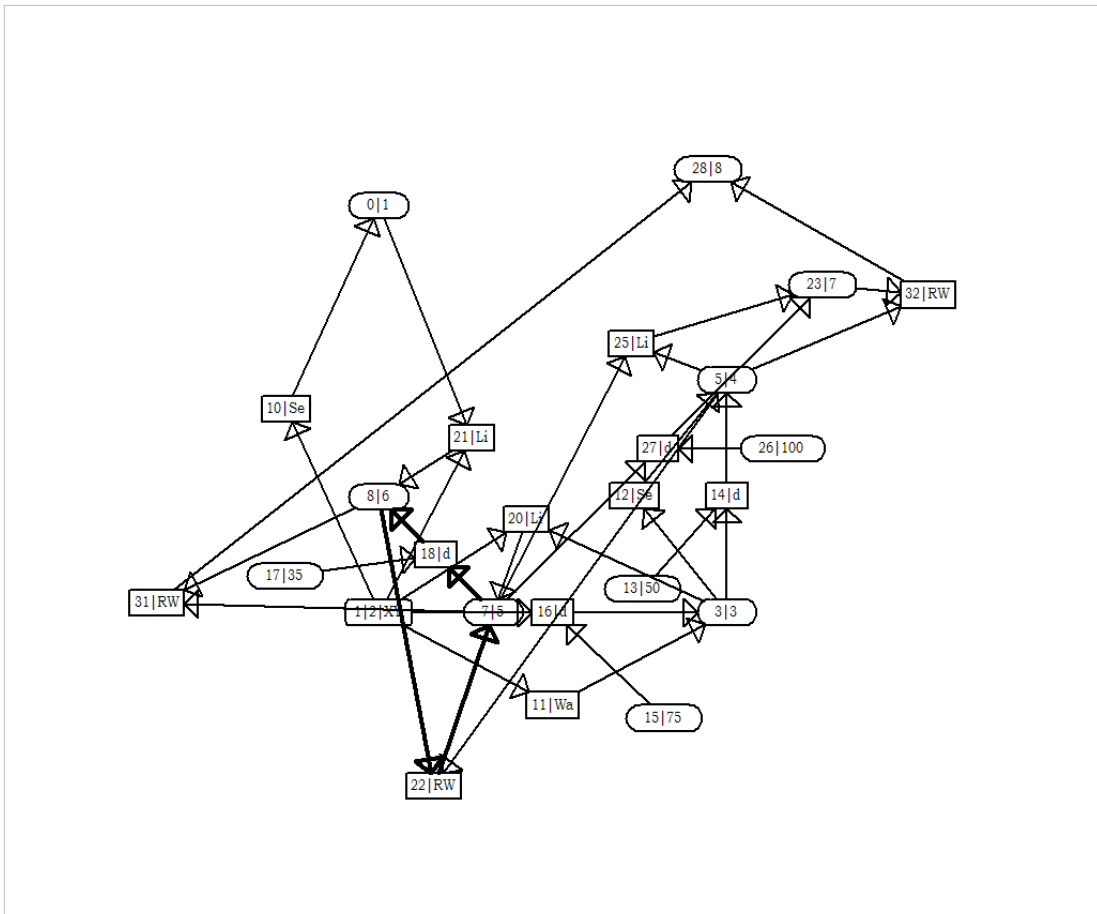


Im zweiten Beispiel ist sei eine Wanne gegeben. In diese Wanne soll ein Klotz mit einer gegebenen Breite  $d$  gelegt werden. Für die Berechnung von Punkt P5 benötigt man Punkt P6 und umgekehrt. Hier ist sequentiell eine Konstruktion möglich, wo P5 an einer Stelle des Bodens der Wanne gelegt wird. Dann kann P6 berechnet werden über einen Kreis um P1 mit dem Radius  $d$ . Der sich ergebende Winkel P6, P5, P4 ist jedoch nicht  $90^\circ$ . Die X-Koordinate von P5 muss so variiert werden, dass der rechte Winkel erreicht wird.

Diese Zyklen im Graphen können nicht durch schrittweise Evaluierung gelöst werden. Sie müssen jeweils als ganzes durch ein Gleichungssystem gelöst werden.



Man sieht, dass bei einer Änderung von  $d$ , ein entsprechender Zyklus mit den Punkten P5 und P6 und den beiden Constraints dem Abstand  $d$  und dem rechten Winkel entsteht.



Bei der Analyse der Freiheitsgrade muss berücksichtigt werden, dass manche Constraints nicht unabhängig voneinander sind. So hat ein Punkt im zweidimensionalen Raum zwar zwei Freiheitsgrade, die jedoch nicht durch zwei Constraints abgedeckt werden können, die jeweils beide nur die  $x$ - oder nur die  $y$ -Koordinate beeinflussen. Ferner dürfen die durch die Constraints gegebenen Ortskurven nicht Kreise mit dem gleichen Mittelpunkt oder parallele Linien sein. Auch können bei einem  $n$ -Eck nur maximal  $n-1$  Winkel festgelegt werden. Des Weiteren sollen auch stark unterbestimmte Systeme ein sinnvolles Verhalten zeigen. Daher sollen die Constraints nicht nur auf die direkt berührten Punkte Auswirkungen haben, sondern sie sollen auch auf entfernter liegende Punkte propagiert werden.

Bei der Erstellung des geometrischen 2D-Modells werden hier folgende Variablen benutzt:

- Punkt: zwei Freiheitsgrade ( $x$ -,  $y$ -Koordinaten)
- Kreis: drei Freiheitsgrade ( $x$ -,  $y$ -Koordinate des Mittelpunkts, Radius)
- skalarer Wert: ein Freiheitsgrad ( $x$ -Wert)

Ein Kreis wird abgeleitet von einem Punkt, damit kann der Mittelpunkt wie ein normaler Punkt behandelt werden.

Ein Kreisbogen wird modelliert, durch einen Kreis und den Anfangs- und einen Endpunkt. Damit hat man zunächst zwar sieben Freiheitsgrade, aber zwei werden durch die beiden Constraints verbraucht, dass der Anfangs- und der Endpunkt auf dem Kreis liegen müssen. So erhält man wieder fünf Freiheitsgrade für den Kreisbogen.

Ein Skalar kann beispielsweise die Distanz von zwei Punkten oder der Radius eines Kreises sein.

Die Freiheitsgrade der Variablen werden eingeschränkt durch die zu erfüllenden Constraints. Das Constraint, das den Abstand zweier Punkte bestimmt, nimmt z.B. einen Freiheitsgrad weg. Eine Konstruktion kann also maximal so lange Constraints erfüllen, bis durch sie alle Freiheitsgrade der Variablen gebunden sind.



### Beispiel

- Eine Linie gegeben durch zwei Endpunkte.
- Vier Freiheitsgrade:  $(x_1, y_1, x_2, y_2)$
- Gibt man die Länge vor hat man noch drei Freiheitsgrade. (Verschieben in x- und y-Richtung und Drehung)
- Fordert man, dass die Linie waagrecht ist, so bleiben noch 2 Freiheitsgrade (Verschieben in x- und y-Richtung)

Man kann jetzt noch die Koordinaten eines Punktes festlegen oder die x-Koordinate des einen und die y-Koordinate des anderen Punktes. Man kann jedoch nicht die x- oder y-Koordinaten beider Punkte festlegen, da diese durch die vorherigen Constraints bereits voneinander abhängig sind. Man muss daher beim Verfolgen der Constraints festhalten, auf welche Koordinaten der Constraint Einfluss hat. Der Constraint *waagrecht* beeinflusst z.B. nur die Y-Koordinaten.

Ferner muss man berücksichtigen, dass manche Constraints die Lage der Punkte untereinander beeinflussen, andere hingegen die Lage und Ausrichtung der Gesamtkonstruktion.

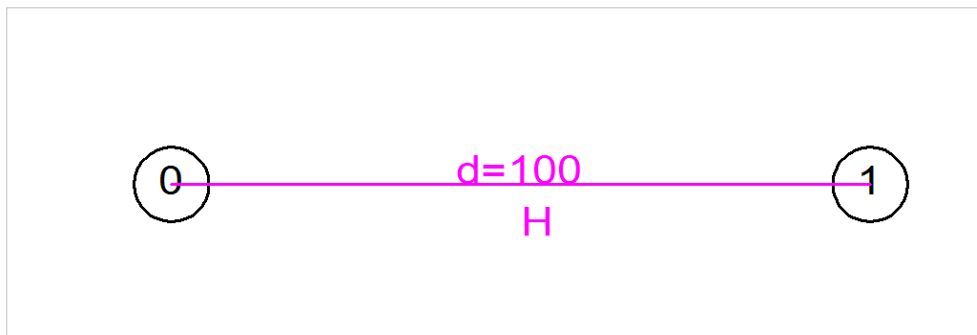
So beeinflusst der Abstand zweier Punkte oder der Constraint, der festlegt, dass drei Punkte einen rechten Winkel bilden, nur die Lage der Punkte zueinander. Für diese Lage zueinander, d.h. die kongruente Form, gibt es bei n Punkten jedoch nur  $2n-3$  Freiheitsgrade. Daher kann man bei einem Dreieck, bei drei Seitenlängen, nicht noch einen Winkel bestimmen.

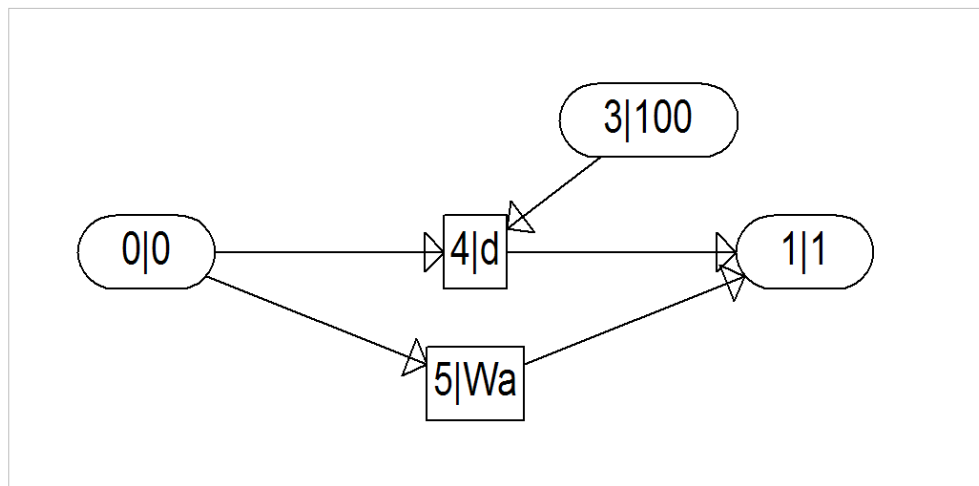
Man kann aber bei einem Dreieck mit drei gegebenen Seitenlängen noch die Koordinaten eines Punktes festlegen und zusätzlich fordern, dass die eine Linie waagrecht ist.

Die Punkte, Kreise, Skalarvariablen und Constraints bilden die Knoten eines bipartiten Graphen. Die eine Knotenklasse bilden die Punkte, Kreise und die skalaren Variablen (diese Klasse wird im Folgenden Variablen genannt), die andere die Constraints. Die Kanten stellen die Beziehungen zwischen den Constraints und den Variablen dar.

### Beispiel

2 Punkte mit Abstand und waagerechter Ausrichtung.





Die Variablen werden später im gerichteten Graphen mit maximal so vielen einlaufenden Kanten verbunden, wie sie Freiheitsgrade haben. Ist der Wert der Variablen festgelegt, werden die adjazenten Kanten später alle als auslaufend orientiert. Wird eine Skalarvariable für mehrere Constraints genutzt, kann nur maximal eine Kante einlaufend sein.

Die Constraint-Knoten haben eine Kantenverbindung zu jeder Variablen, die durch sie beeinflusst wird. In der Literatur wird i.A. mit Constraints gearbeitet, die eine feste Anzahl von Freiheitsgraden binden. Ein Constraint, das den Abstand von 2 Punkten bestimmt, wird mit 2 Punkten und einer Skalarvariablen verknüpft. Entweder bestimmen die beiden Punkte den Abstand oder der Abstand und ein Punkt legt für den anderen Punkt eine Ortskurve fest, nämlich einen Kreis um den ersten Punkt mit dem Abstand als Radius. Man sagt dann: der Abstand-Constraint konsumiert einen Freiheitsgrad. In der hier betrachteten Modellierung konsumieren die Constraints jeweils einen Freiheitsgrad, d.h. vom Constraint führt eine auslaufende Kante zu einer Variablen, während die anderen Kanten alle einlaufend sind.

Ein Kreis kann durch jede Kombination von drei vorgegebenen Elementen festgelegt werden.

Ein Kreis kann durch Mittelpunkt und Radius gegeben sein. Für die Punkte, die auf dem Kreis liegen, ist ein Freiheitsgrad gebunden. Der andere kann noch genutzt werden, z.B. für die waagerechte bzw. senkrechte Ausrichtung.

Ein Kreis kann auch dadurch bestimmt werden, dass er tangential zu drei anderen Kreisen liegt.

Wird einer der drei Kreise verschoben, so werden für Mittelpunkt und Radius des inneren Kreises die Werte angepasst.

Es ist jedoch nicht immer möglich, den Graphen nicht-zyklisch zu orientieren. Dann werden in dem Graphen die starken Komponenten ermittelt. Das ist eine Aufteilung der Knotenmenge in Teilmengen so, dass die Zyklen alle innerhalb der starken Komponenten liegen. Die starken Komponenten mit mehr als einem Knoten werden im Allgemeinen durch eine Iteration berechnet. Da die starken Komponenten einen Graph ohne Zyklen ergeben (DAG) kann die Reihenfolge der Berechnung der starken Komponenten nach der topologischen Sortierung erfolgen.

## Regelbasierte Techniken

**Regelbasierte Techniken** führen zur Konstruktion von Control Sets aus Längen und Winkeln. Diese Controls Sets definieren Dreiecke oder Vierecke, die dann zur Gesamtlösung zusammengefasst werden. Bei den Dreiecken entsprechen die Regeln den verschiedenen Möglichkeiten, aus Seite und Winkeln ein Dreieck zu konstruieren.

Ansätze in dieser Richtung stammen findet man u.a. bei Brüderlin<sup>[8]</sup> bzw. Roller u.a.<sup>[9]</sup>

Der Ansatz benutzt dabei die Technik der Expertensysteme. Die geometrischen Elemente und die Constraints sind Fakten im Sinne der Expertensysteme. Durch die Anwendung von Produktionsregeln werden für bestimmte geometrische Konstellationen Koordinatenbestimmungen gemacht und damit Fakten auf einem höheren Niveau erzeugt. Dieser Prozess wird solange fortgeführt, bis entweder alle Koordinaten bestimmt sind oder keine Regel mehr angewandt werden kann.

Eine umfassende Theorie hierzu zur Zerlegen der geometrischen Modelle findet man bei Hoffman, Lomonosov, Litharam<sup>[10]</sup>.

Die folgende Darstellung orientiert sich an<sup>[9]</sup> und<sup>[11]</sup>.

Betrachtet werden hierbei Linien mit ihren Endpunkten und Maßrestriktionen. Liegt z.B. ein Punkt auf einem Kreis, so ist der Abstand zwischen Punkt und Mittelpunkt des Kreises identisch mit dem Radius des Kreises. Auch die Bedingung, dass zwei Kreise tangential sind, kann abgebildet werden auf die Bedingung, dass der Abstand der Mittelpunkte die Summe oder die Differenz der Radien ist. Ebenso kann die Tangentialbedingung zwischen einer Geraden und einem Kreis durch den rechten Winkel im Tangentialpunkt definiert werden.

Daher wird im Folgenden angenommen, dass alle Constraints in Maß- und Winkelrestriktionen übersetzt worden sind. Zur Beschreibung der geometrischen Beziehungen wird eine auf Sunde<sup>[12]</sup> zurückgehende Notation mit so genannten CA-Sets und CD-Sets benutzt. Dies wird auch beschrieben im Buch von Dieter Roller.<sup>[11]</sup>

Diese Control Sets sind wie folgt definiert:

- Ein CA-Set sind 3 Punkte (P1, P2, P3) und ein Winkel phi, wobei der Winkel phi zwischen P1 und P2 an der Wurzel P2 festgelegt ist.
- Ein CD-Set ist eine Menge von Punkten, deren Lage zu einander festgelegt ist. Die CD-Sets bilden jeweils einen Rigid, d.h. eine Konstruktion, die nur noch als ganzes verschoben oder gedreht werden kann.

Die Constraints definieren jeweils einen CA- oder CD-Set. Durch die Regeln werden aus zwei oder mehreren CA- oder CD-Sets jeweils neue größere CA- bzw. CD-Sets erzeugt. Das Modell ist vollständig bestimmt, wenn alle Punkte zum einem CD-Set gehören.

Die initialen Sets werden aus den Constraints abgeleitet:

- Wenn ein Winkel zwischen 3 Punkten festliegt, wird ein CA-Set erzeugt.
- Wenn ein Abstand Constraint zwischen 2 Punkten festgelegt wird, wird ein CD-Set mit diesen beiden Punkten erzeugt.
- Wenn 2 Punkte fixiert sind, wird ein CD-Set mit den beiden Punkten erzeugt. Die anderen Constraints bei zwei fixierten Punkten werden durch die Lage der Konstruktion und nicht durch die Form erfüllt.

Diese elementaren CA- und CD-Sets werden mit Hilfe der folgenden Konstruktionsregeln zusammengefasst.

Die folgenden Regeln beschreiben die Konstruktionsregeln für Dreiecke.

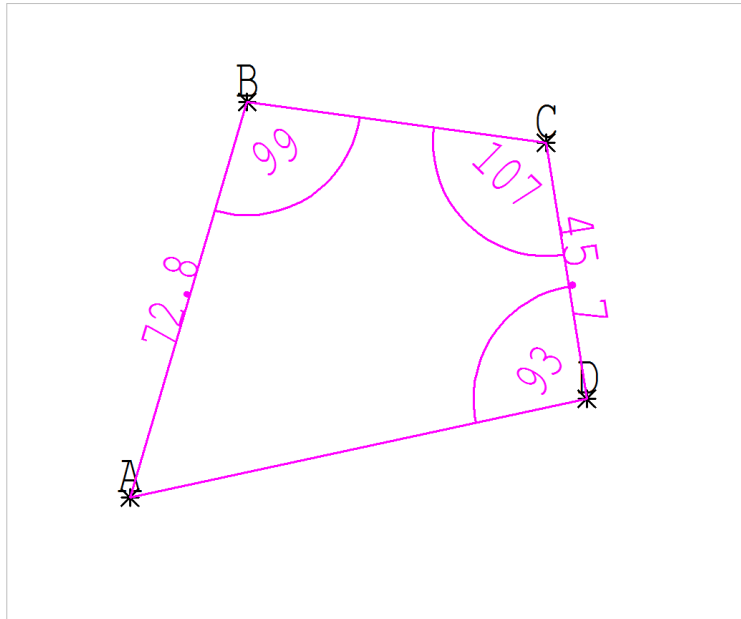
- WENN drei CD-Sets jeweils paarweise einen gemeinsamen Punkt haben, DANN werden die CD-Sets vereinigt. (Dreieck aus 3 Strecken SSS)
- WENN zwei CD-Sets einen gemeinsamen Punkt haben UND der gemeinsame Punkt UND jeweils ein Punkt aus beiden CD-Sets in einem CA-Set sind, DANN werden die beiden CD-Sets vereinigt. (Dreieck Strecke, Winkel, Strecke SWS)
- WENN zwei CA-Sets zwei Punkte gemeinsam haben, die in einem CD-Set sind, DANN bilden die drei Sets einen CD-Set (Dreieck Winkel, Strecke, Winkel WSW)

- WENN zwei CD-Sets einen Punkt gemeinsam haben und in beiden CD-Sets jeweils ein Punktepaar aus einem CA-Set vorkommt, DANN werden die Sets zu einem CD-Set (Dreieck Winkel, Strecke, Strecke WSS).

Zwei andere Regeln werden eingeführt, um ein Winkel-Constraint zwischen zwei nicht adjazenten CD Sets zu behandeln. Diese Regeln erzeugen ein Viereck.

- WENN die zwei CD-Sets, (A, B) und (C, D), keinen Punkt gemeinsam haben und zwischen ihnen die CA-Sets (A, B, C), (B, C, D) und (C, D, A) existieren, dann werden die Sets zu einem CD-Set vereinigt. (Viereck WSWWS).
- WENN ein Viereck durch drei adjazente CD Sets und durch zwei mit der nicht festgelegten Seite adjazente CA-Sets bestimmt wird, DANN ergibt dies einen CD-Set der vier Punkte. (Viereck WSSSW)

Beispiel für ein Viereck WSWWS

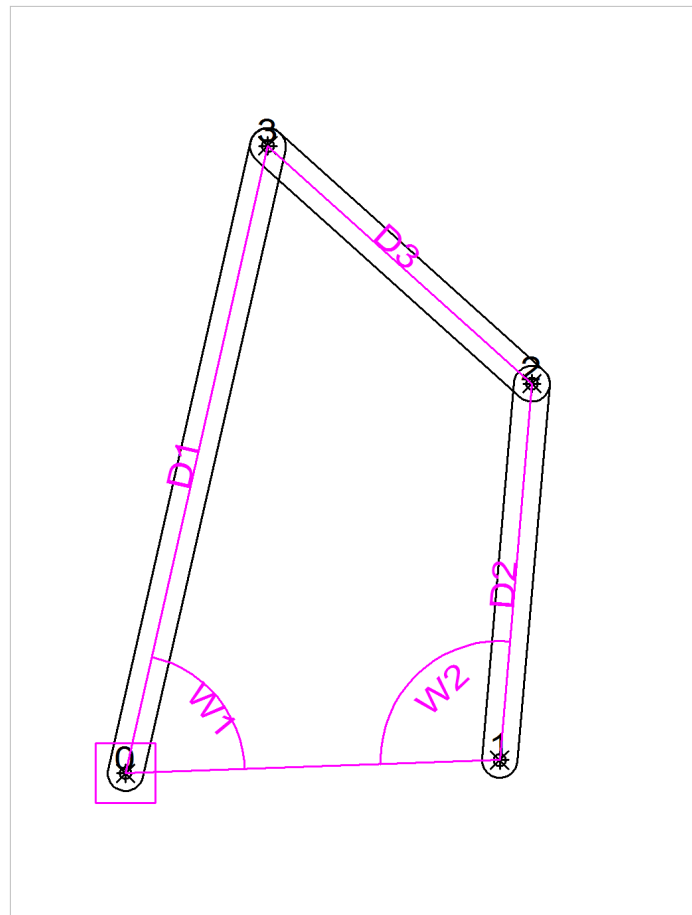


Die Konstruktion des CD Sets (A, B, C, D) ist wie folgt möglich:

- C und D seien vorgegeben.
- B liegt auf einer Linie, die durch C, D und den Winkel 107 gegeben ist.
- A liegt auf einer Linie, die durch C, D und den Winkel 93 gegeben ist.
- Der Abstand von A zur Linie B, C ist  $72.8 \cdot \sin(99)$ .
- Damit liegt A auf einer Parallelen zu B, C mit diesem Abstand. Damit ist A bestimmt.
- Der Abstand von B zu A, D ist  $72.8 \cdot \sin(360 - 99 - 107 - 93)$ . Damit liegt B auf einer Parallelen zu A, D mit diesem Abstand.

Damit ist B bestimmt.

Beispiel für ein Viereck WSSSW



Dieses Viereck kann wie folgt berechnet werden:

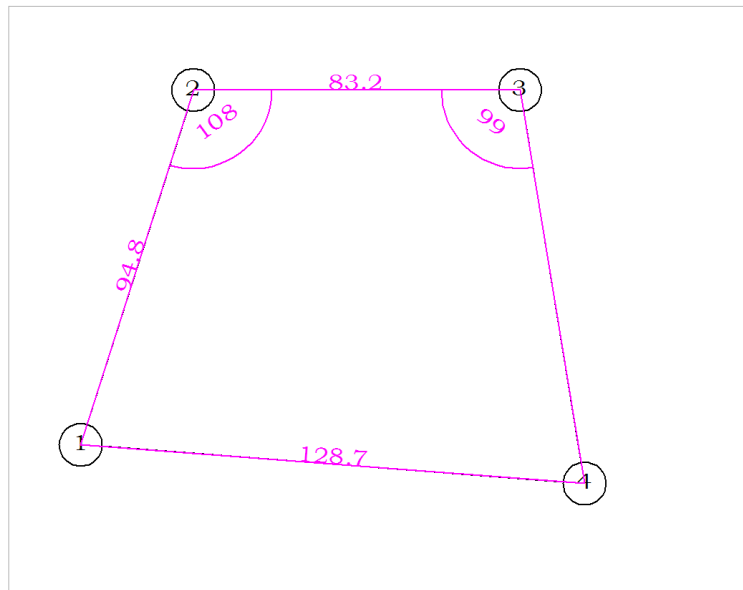
- Zunächst wird angenommen, dass (0) im Nullpunkt liegt und die (1) auf der X-Achse
- Dann ist die Position von (3) bestimmt:  $X=D1*\cos(w1)$ ,  $Y=D1*\sin(w1)$ .
- Der Y Koordinate von (2) ergibt sich aus  $d2*\sin(w2)$
- Ferner liegt (2) auf dem Kreis um (3) mit dem Radius  $d3$
- Aus (2) lässt sich mit die X Koordinate von (1) berechnen:  $X1:= X2-d2*\cos(w2)$ .

Durch Transformation und Drehung kann aus der speziellen Lösung die allgemeine Lösung bestimmt werden.

Bestimmen der Gesamtlösung

Die durch die Constraints gegebenen CD- und CA-Sets werden untersucht, ob eine der obigen Regeln angewandt werden kann. Falls ja, werden die Sets, die in die Regel eingehen durch den sich ergebenden CD-Set ersetzt. Dies wird so lange gemacht, bis entweder nur noch ein CD-Set übrig bleibt oder keine Regel angewandt werden kann. Kann keine Regel mehr angewandt werden, so gibt es mit dem obigen Verfahren keine Lösung, ansonsten ist die Lage der Punkte zueinander durch das CD-Set gegeben.

Beispiel



Mit  $CD[12]$ ,  $CD[23]$  und  $CA[123]$  kann  $CD[123]$  bestimmt werden (Dreieck SWS). Damit ist der Abstand 13 bestimmt.

Aus  $CD[123]$ ,  $CD[14]$  und  $CA[134]$  könnte man  $CD[1234]$  berechnen (Dreieck SSW). Gegeben ist aber  $CA[234]$ . Aus  $CD[123]$  kann jedoch der Winkel 231 berechnet werden. Der Winkel 134 ist dann Winkel 234 – Winkel 231. Damit kann  $CA[234]$  ersetzt werden durch  $CA[134]$  und damit aus  $CD[123]$ ,  $CD[14]$  und  $CA[134]$  das Ergebnis  $CD[1234]$  berechnet werden (Dreieck SSW).

## Anwendungen

Die Parametrische bzw. Constraint basierte Modellierung wird von fast allen modernen 3D CAD Systemen bei der Erstellung der Skizzen benutzt, z.B. in SolidWorks oder Autodesk Inventor.

Es gibt auch einige kostenlose 2D Systeme mit Constraint basierter Modellierung. Nach entsprechender Registrierung kann man bei der LEDAS LTD (Novosibirsk) das Programm LGS 2D <sup>[13]</sup> runterladen. Es benutzt sowohl Graphbasierte als auch Gleichungsbasierte Techniken.

Ein Beispiel für ein System, das Gleichungssysteme benutzt ist das System Solvespace.<sup>[14]</sup> Es kann heruntergeladen werden und nach Beendigung der Probezeit ist der 2D Teil immer noch nutzbar.

Das 2D Cad System VarioCAD hat ein Zusatzmodul Kogge, das es erlaubt Zeichnungen mit Constraints zu erstellen. Es kann heruntergeladen werden unter <sup>[15]</sup>. Eine Beschreibung des KOGGE Moduls findet man unter <sup>[16]</sup>

## Anmerkungen und Einzelnachweise

- [1] Sutherland, I., Sketchpad, a man-machine graphical communication system, in: Spring Joint Computer Conference, S.329-346, Detroit, Michigan, USA, Proceedings 1963
- [2] R. Light, D. Gossard. Modification of geometric models through variational geometry. Computer Aided Design, 14:209--214, July 1982
- [3] C.M. Hoffmann. Geometric & Solid Modeling. Morgan Kaufmann, 1989, Seite 257.
- [4] K. Kondo. Algebraic method for manipulation of dimensional relationships in geometric models. Computer Aided Design, 24(3):141--147, March 1992.
- [5] Roland Berling, Eine Constraint-basierte Modellierung für Geometrische Objekte, Koblenzer Schriften zur Informatik(Fölbach), 1995
- [6] I. Fudos and C. M. Hoffmann: A Graph-constructive Method to Solving systems of Geometric Constraints - ACM Transactions of Graphics, Vol. 16(2), pp. 179-216
- [7] C. Hsu, B. Brüderlin. "A Hybrid Constraint Solver Using Exact and Iterative Geometric Constructions," in CAD Systems Development -- Tools and Methods, D. Roller, P. Brunet, eds., Springer Verlag, 1997.
- [8] Brüderlin, B.: Using geometric rewrite rules for solving geometric problems symbolically, Theoretical Computer Science 116, Elsevier, 1993, S.291-303

- 
- [9] A. Verroust, F. Schonek, and D. Roller. Rule-oriented method for parameterized Computer-aided design. *Computer Aided Design*, 24 (10):531-540, October 1992.
- [10] C. M. Hoffmann and A. Lomonosov and M. Sitharam, Decomposition plans for geometric constraint systems, *Journal of Symbolic Computation*, 2001
- [11] Dieter Roller: CAD : effiziente Anpassungs- und Variantenkonstruktion, Berlin [u.a.] : Springer, 1995., ISBN 3540587799
- [12] Sunde, G.: A CAD system with declarative specification of shape, *Eurographics Workshop on Intelligent CAD Systems*, The Netherlands, 1987, S.90-104.
- [13] Download LEDAS 2D unter <http://ledas.com/products/lgs2d/>
- [14] Download Solvespace unter <http://solvespace.com>
- [15] Download VarioCAD unter <http://uni-koblenz.de/~ros/variocad.html>
- [16] Beschreibung KOGGE unter <http://uni-koblenz.de/~ros/kogge.html>
-

# Quelle(n) und Bearbeiter des/der Artikel(s)

**Benutzer:**ManfredRosendahl/Parametrische Modellierung (CAD) *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?oldid=101467878> *Bearbeiter:* ManfredRosendahl, Reinhard Kraasch

# Quelle(n), Lizenz(en) und Autor(en) des Bildes

**Datei:**UnderCon icon.svg *Quelle:* [http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:UnderCon\\_icon.svg](http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:UnderCon_icon.svg) *Lizenz:* Public Domain *Bearbeiter:* Fry1989, Sarang, Xavax, 玄史生, 1 anonyme Bearbeitungen

**Datei:** ParaMod1.png *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:ParaMod1.png> *Lizenz:* Public domain *Bearbeiter:* Benutzer:ManfredRosendahl

**Datei:** ParaMod2.png *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:ParaMod2.png> *Lizenz:* Public Domain *Bearbeiter:* ManfredRosendahl

**Datei:** 2dreiecke.png *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:2dreiecke.png> *Lizenz:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Bearbeiter:* User:ManfredRosendahl

**Datei:** 2dreiecke-gra.png *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:2dreiecke-gra.png> *Lizenz:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Bearbeiter:* User:ManfredRosendahl

**Datei:** 2dreiecke-dgra.png *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:2dreiecke-dgra.png> *Lizenz:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Bearbeiter:* User:ManfredRosendahl

**Datei:** wanne.png *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Wanne.png> *Lizenz:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Bearbeiter:* User:ManfredRosendahl

**Datei:** wanne-gra.png *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Wanne-gra.png> *Lizenz:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Bearbeiter:* User:ManfredRosendahl

**Datei:** liniehorn.png *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Liniehorn.png> *Lizenz:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Bearbeiter:* User:ManfredRosendahl

**Datei:** liniehorn-gra.png *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Liniehorn-gra.png> *Lizenz:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Bearbeiter:* User:ManfredRosendahl

**Datei:** WSWWS.png *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:WSWWS.png> *Lizenz:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Bearbeiter:* User:ManfredRosendahl

**Datei:** Viereckw3sw.png *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Viereckw3sw.png> *Lizenz:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Bearbeiter:* User:ManfredRosendahl

**Datei:** 4eck2swsw.png *Quelle:* <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:4eck2swsw.png> *Lizenz:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Bearbeiter:* User:ManfredRosendahl

## Lizenz

### Wichtiger Hinweis zu den Lizenzen

Die nachfolgenden Lizenzen beziehen sich auf den Artikeltext. Im Artikel gezeigte Bilder und Grafiken können unter einer anderen Lizenz stehen sowie von Autoren erstellt worden sein, die nicht in der Autorenliste erscheinen. Durch eine noch vorhandene technische Einschränkung werden die Lizenzinformationen für Bilder und Grafiken daher nicht angezeigt. An der Behebung dieser Einschränkung wird gearbeitet. Das PDF ist daher nur für den privaten Gebrauch bestimmt. Eine Weiterverbreitung kann eine Urheberrechtsverletzung bedeuten.

### Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported - Deed

Diese "Commons Deed" ist lediglich eine vereinfachte Zusammenfassung des rechtsverbindlichen Lizenzvertrages ([http://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Lizenzbestimmungen\\_Commons\\_Attribution-ShareAlike\\_3.0\\_Unported](http://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Lizenzbestimmungen_Commons_Attribution-ShareAlike_3.0_Unported)) in allgemeinverständlicher Sprache. Sie dürfen:

- das Werk bzw. den Inhalt **viervielfältigen, verbreiten und öffentlich zugänglich machen**
- Abwandlungen und Bearbeitungen** des Werkes bzw. Inhaltes anfertigen

Zu den folgenden Bedingungen:

- Namensnennung** — Sie müssen den Namen des Autors/Rechteinhabers in der von ihm festgelegten Weise nennen.
- Weitergabe unter gleichen Bedingungen** — Wenn Sie das lizenzierte Werk bzw. den lizenzierten Inhalt bearbeiten, abwandeln oder in anderer Weise erkennbar als Grundlage für eigenes Schaffen verwenden, dürfen Sie die daraufhin neu entstandenen Werke bzw. Inhalte nur unter Verwendung von Lizenzbedingungen weitergeben, die mit denen dieses Lizenzvertrages identisch, vergleichbar oder kompatibel sind.

Wobei gilt:

- Verzichtserklärung** — Jede der vorgenannten Bedingungen kann aufgehoben werden, sofern Sie die ausdrückliche Einwilligung des Rechteinhabers dazu erhalten.
- Sonstige Rechte** — Die Lizenz hat keinerlei Einfluss auf die folgenden Rechte:

- Die gesetzlichen Schranken des Urheberrechts und sonstigen Befugnisse zur privaten Nutzung;
- Das Urheberpersönlichkeitsrecht des Rechteinhabers;
- Rechte anderer Personen, entweder am Lizenzgegenstand selber oder bezüglich seiner Verwendung, zum Beispiel Persönlichkeitsrechte abgebildeter Personen.

- Hinweis** — Im Falle einer Verbreitung müssen Sie anderen alle Lizenzbedingungen mitteilen, die für dieses Werk gelten. Am einfachsten ist es, an entsprechender Stelle einen Link auf <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.de> einzubinden.

### Haftungsbeschränkung

Die „Commons Deed“ ist kein Lizenzvertrag. Sie ist lediglich ein Referenztext, der den zugrundeliegenden Lizenzvertrag übersichtlich und in allgemeinverständlicher Sprache, aber auch stark vereinfacht wiedergibt. Die Deed selbst entfaltet keine juristische Wirkung und erscheint im eigentlichen Lizenzvertrag nicht.

### GNU Free Documentation License

Version 1.2, November 2002

Copyright (C) 2000,2001,2002 Free Software Foundation, Inc.

51 Franklin St, Fifth Floor, Boston, MA 02110-1301 USA

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies

of this license document, but changing it is not allowed.

### 0. PREAMBLE

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondly, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It implements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

### 1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "Document", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "you". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "Modified Version" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "Secondary Section" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "Invariant Sections" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "Cover Texts" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "Transparent" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "Opaque".

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The "Title Page" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

A section "Entitled XYZ" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "Acknowledgements", "Dedications", "Endorsements", or "History".) To "Preserve the Title" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties; any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

### 2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.



### 3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

### 4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

- **A.** Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.
- **B.** List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.
- **C.** State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
- **D.** Preserve all the copyright notices of the Document.
- **E.** Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
- **F.** Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
- **G.** Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.
- **H.** Include an unaltered copy of this License.
- **I.** Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
- **J.** Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
- **K.** For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
- **L.** Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
- **M.** Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.
- **N.** Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.
- **O.** Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another, but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

### 5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements".

### 6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

### 7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

### 8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

### 9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

### 10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See <http://www.gnu.org/copyleft/>.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

### ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

Copyright (c) YEAR YOUR NAME.

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document

under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2

or any later version published by the Free Software Foundation;

with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts.

A copy of the license is included in the section entitled

"GNU Free Documentation License".

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with..." line with this:

with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the

Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.