Universität Koblenz-Landau
FB 4 Informatik

Prof. Dr. Viorica Sofronie-Stokkermans **23.07.2012**
Dipl.-Inform. Markus Bender

Hauptklausur
zur Vorlesung
Logik für Informatiker
im Sommersemester 2012
Lösung

Name: ....

Matrikelnummer: ....

Hinweise:

- Am Anfang:
  - Legen Sie Ihren Studentenausweis und ein Ausweisdokument mit Lichtbild (Personalausweis, Pass, Führerschein) auf den Tisch.
  - Schalten Sie Ihr Handy aus.
  - Benutzen Sie ein dokumentenechtes Schreibgerät (keinen Bleistift). Es sind keine weiteren Hilfsmittel erlaubt.
  - Kennzeichnen Sie jedes neue Blatt Papier (auch Schmierpapier), das Sie benutzen, zunächst mit Namen und Matrikelnummer.
    Sie können leere Blätter bei der Aufsicht durch ein Handzeichen anfordern.
- Am Ende:
  - Kreuzen Sie jede bearbeitete Aufgabe unten in der Tabelle an.
  - Heften Sie den Klausurtext und alle Ihre Lösungsblätter in der linken oberen Ecke zusammen. (Ein Heftapparat steht bei der Aufsicht zur Verfügung.)
    Zu beachten: Blätter, die versehentlich aus dem Hörsaal genommen wurden, können nicht mehr gewertet werden.

Unterschreiben Sie hier nach dem Zusammenheften, vor der Abgabe: **Viel Erfolg!**

....

Aufgabe	1			2			3		4			5		6			7		8	9			Σ
	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	4a	4b	4c	5a	5b	6a	6b	6c	7a	7b	8	9a	9b	9c	
bearbeitet?																							
Punkte:	5	2	4	4	8	1	2	13	2	3	3	8	2	7	3	2	9	1	10	2	1	8	100
erreicht:																							

Aufgabe 1

(5 + 2 + 4 = 11 Punkte)

(1a) Stellen Sie zu der aussagenlogische Formel F die Wahrheitstabelle auf:

$$F: \quad \Big((P \to Q) \wedge (R \leftrightarrow Q)\Big) \to (P \wedge Q)$$

P	Q	R	F_0 $P \to Q$	F_1 $R \leftrightarrow Q$	F_2 $F_0 \wedge F_1$	F_3 $P \wedge Q$	F $F_2 \to F_3$
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(1b) Kreuzen Sie in der untenstehenden Tabelle an, ob diese Formel erfüllbar, unerfüllbar oder allgemeingültig ist. Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

	Erfüllbar	Unerfüllbar	Allgemeingültig
ja	☒	☐	☐
nein	☐	☒	☒

Es gibt mindestens eine Belegung, die die Formel wahr macht. Daher ist sie erfülbar und nicht unerfüllbar.

Es gibt mindestens eine Belegung, die die Formel falsch macht. Daher ist sie nicht allgemeingültig.

(1c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Wahrheitstabelle die konjunktive und disjunktive Normalform der Formel F und geben Sie beide an.

$DNF_F =$

$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

$KNF_F = \neg DNF_{\neg F}$

$DNF_{\neg F} = (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

$KNF_F = (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$

Aufgabe 2 **(4 + 8 + 1 = 13 Punkte)**

Gegeben sei die folgende aussagenlogische Formel:

$$(\neg P)\wedge(Q)\wedge(\neg P\vee R)\wedge(\neg Q\vee S)\wedge(T\vee\neg W)\wedge(\neg S\vee U)\wedge(\neg U\vee\neg T\vee P\vee\neg Z)\wedge(\neg Q\vee\neg S\vee\neg U\vee W)$$

(2a) Schreiben Sie die gegebene Formel als Konjunktion von Implikationen auf.

Die beiden folgenden Schreibweisen der Lösung wurden gleich bewertet:

Möglichkeit I)		Möglichkeit II)
$(P \to \bot)$	$\wedge$	$P \to$
$(\top \to Q)$	$\wedge$	$\to Q$
$(P \to R)$	$\wedge$	$P \to R$
$(Q \to S)$	$\wedge$	$Q \to S$
$(W \to T)$	$\wedge$	$W \to T$
$(S \to U)$	$\wedge$	$S \to U$
$((U \wedge T \wedge Z) \to P)$	$\wedge$	$U, T, Z \to P$
$((Q \wedge S \wedge U) \to W)$		$Q, S, U \to W$

(2b) Wenden Sie den Markierungsalgorithmus zur Überprüfung der Erfüllbarkeit von Hornklauseln auf die im Schritt (2a) erzeugte Konjunktion von Implikationen an. Geben Sie explizit für jeden Schritt an, welche Atome markiert werden, und wieso die Markierung zustande kommt.

	Markierte Atome und Erklärung:
$P \to$	$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \to Q$
$\to \underline{Q}$	$\{Q, S\}$ wegen $Q \to S$
$P \to R$	$\{Q, S, U\}$ wegen $S \to U$
$\underline{Q} \to \underline{S}$	$\{Q, S, U, W\}$ wegen $Q, S, U \to W$
$\underline{W} \to \underline{T}$	$\{Q, S, U, W, T\}$ wegen $W \to T$
$\underline{S} \to \underline{U}$	Keine weiteren Schritte möglich, da es
$\underline{U}, \underline{T}, Z \to P$	keine Implikation gibt,deren linke Seite
$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \to \underline{W}$	vollständig markiert ist und die rechte Seite nicht

(2c) Ist die Klauselmenge erfüllbar oder unerfüllbar? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

Es gibt 2 mögliche Antworten, die gleich bewertet wurden:

Antwort 1 Da der Makierungsalgorithmus einen Fixpunkt erreicht hat und keiner linke Seite einer Regel der Form $P \to \bot$ markiert wurde, ist die Formel erfüllbar.

Antwort 2 Mit dem Markierungsalgorithmus konnten wir die Belegung $\mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(U) = \mathcal{A}(W) = \mathcal{A}(T) = 1, \mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(Z) = 0$ herleiten, die die Formel wahr macht. Somit ist die Formel erfüllbar.

Aufgabe 3 **(2 + 13 = 15 Punkte)**

(3a) Geben Sie die allgemeinste Struktur eines Beweises mit struktureller Induktion (für Aussagenlogik) an.

Induktionsbehauptung: Für jede wohlgeformte aussagenlogische Formel gilt die Aussage $p(x)$.

Induktionsbasis (I.B.) Zu zeigen: Die Behauptung gilt für $F \in \Pi \cup \{\bot, \top\}$.

Sei F eine Formel, mit $F \notin \Pi \cup \{\bot, \top\}$.

Induktionsvoraussetzung (I.V.) Die Behauptung gilt für alle Formeln, die echte Teilformeln von F sind.

Induktionsschritt (I.S.) Zu zeigen: Die Behauptung gilt für F. Verwendung der I.V. 5 Fälle zu betrachten:

1. $F = \neg G$
2. $F = G \vee H$
3. $F = G \wedge H$
4. $F = G \rightarrow H$
5. $F = G \leftrightarrow H$

(3b) Für jede aussagenlogische Formel F und jede Aussagenvariablen $P, Q \in \Pi$, sei $F[P \mapsto Q]$ die Formel, die durch das Ersetzen aller Vorkommen von P in F durch Q entsteht.

Beispiele: $(P \wedge R)[P \mapsto Q] = Q \wedge R$
$((P \vee R) \wedge (P \vee Q))[P \mapsto Q] = (Q \vee R) \wedge (Q \vee Q)$
$(R \vee S)[P \mapsto Q] = R \vee S$

Beweisen Sie folgende Behauptung durch strukturelle Induktion:

Sei $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(Q)$.
Für jede Formel F gilt: $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(F[P \mapsto Q])$.

I.B. Zu zeigen: Die Behauptung für $F \in \Pi \cup \{\bot, \top\}$?

1) $F = \bot$, gilt trivial, da $\bot[P \mapsto Q] = \bot$
2) $F = \top$, gilt trivial, da $\top[P \mapsto Q] = \top$
3) $F \in \Pi$, 2 Fälle:
   a) $F = R$ mit $R \neq P$ gilt trivial, da $R[P \mapsto Q] = R$
   b) $F = P$: $\mathcal{A}(P[P \mapsto Q]) = \mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(P)$ (laut Definition von $\mathcal{A}$)

Damit ist die Induktionsbasis bewiesen

Sei F eine Formel, mit $F \notin \Pi \cup \{\bot, \top\}$.

I.V. Die Behauptung gilt für alle Formeln, die echte Teilformeln von F sind.

I.S. Zu zeigen: Die Behauptung gilt für F. 5 Fälle zu betrachten:

1. $F = \neg G$:

$$\mathcal{A}(F[P \mapsto Q]) = \neg\mathcal{A}(G[P \mapsto Q]) \overset{I.V}{=} \neg\mathcal{A}(G) = \mathcal{A}(F)$$

2. $F = G \circ H$ mit $\circ \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$:

$$\mathcal{A}(F[P \mapsto Q]) = \mathcal{A}(G[P \mapsto Q]) \circ \mathcal{A}(H[P \mapsto Q]) \overset{I.V}{=} \mathcal{A}(G) \circ \mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(F)$$

Somit ist gezeigt, dass die Aussage für beliebige aussagenlogische Formeln gilt.

Aufgabe 4 **(2 + 3 + 3 = 8 Punkte)**

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{f/2, g/2\}$ und $\Pi = \{\approx/2\}$. Sei X eine Menge von Variablen und $x, y \in X$.
Sei $\mathcal{A}$ die folgende Σ-Struktur:

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{f_\mathcal{A} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g_\mathcal{A} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}, \{\approx_\mathcal{A}\})$$

wobei für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $f_\mathcal{A}(n_1, n_2) = n_1 * n_2 \in \mathbb{N}$
für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $g_\mathcal{A}(n_1, n_2) = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$
für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 \approx_\mathcal{A} n_2$ gdw. $n_1 = n_2$

Sei $\beta : X \to \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 23, \beta(y) = 1, \beta(z) = 19$.

Evaluieren Sie:

(4a) $\mathcal{A}(\beta)(g(f(x, y), f(z, y)))$.

(4b) $\mathcal{A}(\beta)(\forall x(f(x, y) \approx x))$.

(4c) $\mathcal{A}(\beta)(\forall x \forall y(f(x, y) \approx x))$.

Geben Sie dabei sinnvolle Zwischenschritte an.

(4a)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\beta)(g(f(x, y), f(z, y)))\\
=&g_\mathcal{A}(f_\mathcal{A}(\beta(x), \beta(y)), f_\mathcal{A}(\beta(z), \beta(y)))\\
=&g_\mathcal{A}(f_\mathcal{A}(23, 1), f_\mathcal{A}(19, 1))\\
=&g_\mathcal{A}((23 * 1), (19 * 1))\\
=&((23 * 1) + (19 * 1))\\
=&42
\end{aligned}$$

(4b)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\beta)(\forall x(f(x, y) \approx x))\\
=&min_{n \in \mathbb{N}}\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto n])(f(x, y) \approx x)\}\\
=&min_{n \in \mathbb{N}}\{(f_\mathcal{A}(n, 1) \approx_\mathcal{A} n)\}\\
=&min_{n \in \mathbb{N}}\{((n * 1) = n)\}\\
=&min_{n \in \mathbb{N}}\{(n = n)\}\\
=&1
\end{aligned}$$

(4c)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\beta)(\forall x \forall y(f(x, y) \approx x))\\
=&min_{n_1 \in \mathbb{N}} \; min_{n_2 \in \mathbb{N}}\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto n_1, y \mapsto n_2])(f(x, y) \approx x)\}\\
=&min_{n_1 \in \mathbb{N}} \; min_{n_2 \in \mathbb{N}}\{(f_\mathcal{A}(n_1, n_2) \approx_\mathcal{A} n_1)\}\\
=&min_{n_1 \in \mathbb{N}} \; min_{n_2 \in \mathbb{N}}\{((n_1 * n_2) = n_1)\}\\
=&0 \text{ ,weil z.B. für } n_1 = 2, n_2 = 2 \text{ ist } n_1 * n_2 \neq n_1
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

(($3+5$) + ($1+1$) = 10 Punkte)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{a/0, f/2, g/1, h/2\}$. Sei X eine Menge von Variablen und $w, x, y, z \in X$.
Gegeben seien die folgenden Mengen von Gleichungsproblemen:

(1) $\{f(x,y) \doteq f(g(y), h(x,x))\}$

(2) $\{f(x,a) \doteq f(h(y,a), y), h(w,z) \doteq h(g(x), g(x))\}$

(5a) Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus nach Martelli/Montanari auf die gegebenen Probleme an. Notieren Sie dabei die einzelnen Zwischenschritte. Jeder Schritt soll der Anwendung einer Regel des Algorithmus' entsprechen. (Die Namen der verwendeten Regeln müssen nicht angegeben werden.) Achten Sie darauf, den Algorithmus so lange anzuwenden, bis keine Regel mehr anwendbar ist.

(5b) Geben Sie für jedes der zwei Gleichungsprobleme, mit Hilfe der Ergebnissen aus (5a), an, ob es unifizierbar ist. Begründen Sie kurz Ihre Antwort. Geben Sie für jedes unifizierbare Problem explizit den allgemeinsten Unifikator an.

(5a) (1)

$$\begin{aligned}
& \{f(x,y) \doteq f(g(y), \quad h(x,x))\} \\
\Rightarrow_{MM} \; & \{x \doteq g(y), \quad y \doteq h(x,x)\} \\
\Rightarrow_{MM} \; & \{x \doteq g(y), \quad y \doteq h(g(y), g(y))\} \\
\Rightarrow_{MM} \; & \bot
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
& \{f(x,a) \doteq f(h(y,a), y), \quad h(w,z) \doteq h(g(x), g(x))\} \\
\Rightarrow_{MM} \; & \{x \doteq h(y,a), \quad a \doteq y, \quad h(w,z) \doteq h(g(x), g(x))\} \\
\Rightarrow_{MM} \; & \{x \doteq h(y,a), \quad a \doteq y, \quad w \doteq g(x), \quad z \doteq g(x)\} \\
\Rightarrow_{MM} \; & \{x \doteq h(y,a), \quad a \doteq y, \quad w \doteq g(h(y,a)), \quad z \doteq g(h(y,a))\} \\
\Rightarrow_{MM} \; & \{x \doteq h(y,a), \quad y \doteq a, \quad w \doteq g(h(y,a)), \quad z \doteq g(h(y,a))\} \\
\Rightarrow_{MM} \; & \{x \doteq h(a,a), \quad y \doteq a, \quad w \doteq g(h(a,a)), \quad z \doteq g(h(a,a))\}
\end{aligned}$$

(5b) (1) Wegen $y \doteq h(g(y), g(y))$, d.h. auf der linken Seite steht eine Variable, die im Term auf der rechten Seite vorkommt, bricht der MM-Algorithmus mit dem Ergebnis 'nicht unifizierbar' ab. Entsprechend gibt es keinen mgu für dieses Problem.

(2) Da der MM-Algorithmus nicht abgebrochen ist, und es keine weiteren Regeln mehr gibt, die angewendet werden können, ist dieses Problem mit dem mgu $\sigma = [h(a,a)/x, \quad a/y, \quad g(h(a,a))/w, \quad g(h(a,a))/z]$ unifizierbar.

Aufgabe 6 **((1 + 4 + 2) + 3 + (1 + 1) = 12 Punkte)**

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{f/1\}$ und $\Pi = \{p/2, r/2\}$. Sei X eine Menge von Variablen und $x, y, z, u \in X$.
Sei F die folgende prädikatenlogische Formel in der Signatur Σ:

$$\exists u \Big(\forall x \Big(\big(\forall y \, (\, p(x,y) \; \rightarrow \; p(u, f(y)) \,) \big) \; \rightarrow \; \forall y \, \big(\, (\neg p(y,x)) \; \rightarrow \; \exists z \, (r(f(y), z)) \, \big) \Big) \Big)$$

Geben Sie zur Formel F jeweils die folgenden Formen an:

(6a) die bereinigte Form
die Negationsnormalform
die Pränexform

(6b) die Skolemform

(6c) die Skolemform mit Matrix in konjunktiver Normalform
die Klauselnormalform (in Mengennotation)

$$\exists u \Big(\forall x \Big(\big(\forall y \, (\, p(x,y) \; \rightarrow \; p(u, f(y)) \,) \big) \; \rightarrow \; \forall y \, \big(\, (\neg p(y,x)) \; \rightarrow \; \exists z \, (r(f(y), z)) \, \big) \Big) \Big)$$

$$\equiv \exists u \Big(\forall x \Big(\neg \big(\forall y \, (\, \neg (p(x,y)) \; \vee \; p(u, f(y)) \,) \big) \; \vee \; \forall y \, \big(\, \neg(\neg p(y,x)) \; \vee \; \exists z \, (r(f(y), z)) \, \big) \Big) \Big)$$

$$\equiv \exists u \Big(\forall x \Big(\big(\exists y \, (\, p(x,y) \; \wedge \neg \; p(u, f(y)) \,) \big) \; \vee \; \forall y \, \big(\, p(y,x) \; \vee \; \exists z \, (r(f(y), z)) \, \big) \Big) \Big) \quad (NNF)$$

$$\equiv \exists u \Big(\forall x \Big(\big(\exists y \, (\, p(x,y) \; \wedge \neg \; p(u, f(y)) \,) \big) \; \vee \; \forall v \, \big(\, p(v,x) \; \vee \; \exists z \, (r(f(v), z)) \, \big) \Big) \Big) \quad (bereinigt)$$

$$\equiv \exists u \forall x \exists y \forall v \exists z \Big(\, (p(x,y) \; \wedge \neg \; p(u, f(y)) \,) \; \vee \; p(v,x) \; \vee \; r(f(v), z) \, \Big) \quad (PNF)$$

$$\Rightarrow_S \forall x \forall v \Big(\, (p(x, sk_y(x)) \; \wedge \neg \; p(sk_u, f(sk_y(x))) \,) \; \vee \; p(v,x) \; \vee \; r(f(v), sk_z(x,v)) \, \Big) \quad (SNF)$$

$$\equiv \forall x \forall v \Big(\big(p(x, sk_y(x)) \vee p(v,x) \vee r(f(v), sk_z(x,v)) \big) \wedge \big(\neg p(sk_u, f(sk_y(x))) \vee p(v,x) \vee r(f(v), sk_z(x,v)) \big) \Big) \quad (SNF \; mit \; KNF)$$

$$\equiv \{\{p(x, sk_y(x)), p(v,x), r(f(v), sk_z(x,v))\}, \{\neg p(sk_u, f(sk_y(x))), p(v,x), r(f(v), sk_z(x,v))\}\} \quad (Kl.-Menge)$$

Aufgabe 7 **(9 + 1 = 10 Punkte)**

Sei N die folgende Klauselmenge in der Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/1, h/1\}$, $\Pi = \{p/2, q/1, r/2\}$ und X eine Menge von Variablen mit $u, x, y, z \in X$:

$$
\begin{array}{rcll}
N & = & \{ & \{\ r(y, f(x)), \quad \neg p(u, g(x))\}, \\
 & & & \{\neg q(h(g(z))), \quad p(u, z)\}, \\
 & & & \{\ q(h(x)), \quad p(y, x)\}, \\
 & & & \{\neg r(g(x), u), \quad \neg p(f(z), y)\} \quad \}.
\end{array}
$$

Beweisen Sie mit Hilfe des prädikatenlogischen Resolutionkalküls, dass die Klauselmenge N unerfüllbar ist:

(7a) Wenden Sie den Resolutionskalkül auf die gegebene Klauselmenge an und versuchen Sie die leere Klausel herzuleiten. Geben Sie für jeden Schritt explizit alle Umbenennungen, Unifikatoren, Resolventen bzw. Faktoren an.

(7b) Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil (7a) um eine *begründete* Aussage über die Unerfüllbarkeit der gegebenen Formel zu machen.

Da wir die leere Klausel herleiten konnten, folgt aus der Korrektheit des Resolutionskalküls, dass die Klauselmenge unerfülbar ist

Variablenmengen der Klauseln disjunkt machen. Vermindert Umbenennungen.

$(1): \{\ \ r(y_1, f(x_1)),\ \ \neg p(u_1, g(x_1))\}$
$(2): \{\neg q(h(g(z_2))),\ \ p(u_2, z_2)\}$
$(3): \{\ \ q(h(v_3)),\ \ p(u_3, v_3)\}$
$(4): \{\neg r(g(x_4), u_4),\ \ \neg p(f(z_4), y_4)\}$

$$\frac{(2):\ \{\neg q(h(g(z_2))), p(u_2, z_2)\} \qquad (3):\ \{q(h(v_3)), p(u_3, v_3)\}}{(5):\ \{p(u_2, z_2), p(u_3, g(z_2))\}}$$
mit mgu $= [g(z_2)/v_3]$

$(5): \{p(u_2, z_2), p(u_3, g(z_2))\}$

$$\frac{(1):\ \{\ \ r(y_1, f(x_1)),\ \ \neg p(u_1, g(x_1))\} \qquad (4):\ \{\neg r(g(x_4), u_4),\ \ \neg p(f(z_4), y_4)\}}{(6):\ \{\neg p(u_1, g(x_1)), \neg p(f(z_4), y_4)\}}$$
mit mgu $= [g(x_4)/y_1, f(x_1)/u_4]$

$(6): \{\neg p(u_1, g(x_1)), \neg p(f(z_4), y_4)\}$

$$\frac{(6):\ \{\neg p(u_1, g(x_1)), \neg p(f(z_4), y_4)\}}{(7):\ \{\neg p(f(z_4), g(x_1))\}}$$
faktorisieren mit mgu $= [f(z_4)/u_1, g(x_1)/y_4]$

$(7): \{\neg p(f(z_4), g(x_1))\}$

$$\frac{(5):\ \{p(u_2, z_2), p(u_3, g(z_2))\} \qquad (7):\ \{\neg p(f(z_4), g(x_1))\}}{(8):\ \{p(u_3, g(g(x_1)))\}}$$
mit mgu $= [f(z_4)/u_2, g(x_1)/z_2]$

$(8): \{p(u_3, g(g(x_1)))\}$

Umbenennen von x_1 nach x_7 in (8) führt zu $(8')$
$$\frac{(7):\ \{\neg p(f(z_4), g(x_1))\} \qquad (8'):\ \{p(u_3, g(g(x_7)))\}}{(9):\ \perp}$$
mit mgu $= [f(z_4)/u_3, g(x_7)/x_7]$

$(9): \perp$

Aufgabe 8

(9 + 1 = 10 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe des aussagenlogischen Tableaukalküls, dass die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$\Big(P \vee \big(R \rightarrow (P \wedge Q)\big)\Big) \wedge \Big(\big(R \wedge \neg P\big) \vee \big(R \wedge \neg(Q \vee P)\big)\Big)$$

Führen Sie vor der Verwendung des Tableaukalküls *keine* Äquivalenzumformungen durch. Erklären Sie kurz (anhand des erhaltenen Tableaus) warum die Formel unerfüllbar ist.

1. $(P \vee (R \rightarrow (P \wedge Q))) \wedge ((R \wedge \neg P) \vee (R \wedge \neg(Q \vee P)))$
2. $P \vee (R \rightarrow (P \wedge Q))$ $[1_1, \alpha]$
3. $(R \wedge \neg P) \vee (R \wedge \neg(Q \vee P))$ $[1_2, \alpha]$

- 4. $R \wedge \neg P$ $[3_1, \beta]$
  - 6. R $[4_1, \alpha]$
  - 7. $\neg P$ $[4_2, \alpha]$
    - 8. P $[2_1, \beta]$
      - $\perp$
    - 9. $R \rightarrow (P \wedge Q)$ $[2_2, \beta]$
      - 10. $\neg R$ $[9_1, \beta]$
        - $\perp$
      - 11. $P \wedge Q$ $[9_2, \beta]$
        - 12. P $[11_1, \alpha]$
        - 13. Q $[11_2, \alpha]$
        - $\perp$
- 5. $R \wedge \neg(Q \vee P)$ $[3_2, \beta]$
  - 14. R $[5_1, \alpha]$
  - 15. $\neg(Q \vee P)$ $[5_2, \alpha]$
  - 16. $\neg Q$ $[15_1, \alpha]$
  - 17. $\neg P$ $[15_2, \alpha]$
    - 18. P $[2_1, \beta]$
      - $\perp$
    - 19. $R \rightarrow (P \wedge Q)$ $[2_2, \beta]$
      - 20. $\neg R$ $[19_1, \beta]$
        - $\perp$
      - 21. $P \wedge Q$ $[19_2, \beta]$
        - 22. P $[21_1, \alpha]$
        - 23. Q $[21_2, \alpha]$
        - $\perp$

Da der Tableaukalkül ein Widerlegungskalkül ist, dessen Korrektheit bewiesen ist, wissen wir, dass aus dem abgeleiteten, geschlossenen Tableau folgt, dass die gegebene Formel unerfüllbar ist.

Aufgabe 9 **$((1+1)+1+(7+1)=11$ Punkte)**

Gegeben seien die folgenden prädikatenlogischen Formeln:

$F_1: \quad \exists z\, p(z)$
$F_2: \quad \forall x\, (p(x) \rightarrow q(x))$
$F_3: \quad \exists z\, q(z)$

in der Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$, wobei $\Pi = \{p/1, q/1\}$ mit Variablen $x, y, z \in X$.

(9a) Stellen Sie zwei Formeln H_0 und H_1 auf, so dass:

$F_1 \wedge F_2 \models F_3$ genau dann, wenn H_0 allgemeingültig ist,
genau dann, wenn H_1 unerfüllbar ist.

Dabei sollten F_1, F_2, F_3 als Teilformeln von H_0 (bzw. H_1) *unverändert* erhalten bleiben.

$$H_0 = (F_1 \wedge F_2) \rightarrow F_3 = ((\exists z\ p(z)) \wedge (\forall x\ (p(x) \rightarrow q(x))) \rightarrow (\exists z\ q(z))$$
$$H_1 = F_1 \wedge F_2 \wedge \neg F_3 = (\exists z\ p(z)) \wedge (\forall x\ (p(x) \rightarrow q(x)) \wedge \neg(\exists z\ q(z))$$

(9b) Ihnen steht der Tableaukalkül mit freien Variablen zur Verfügung um zu untersuchen, ob $F_1 \wedge F_2 \models F_3$ gilt. Entscheiden Sie, auf welcher der beiden Formeln (H_0 oder H_1) Sie die Tableauregeln anwenden müssen.

Wir wählen H_1, (da der Tableaukalkül ein Widerlegungskalkül ist)

(9c) Verwenden Sie den Tableaukalkül mit freien Variablen auf der in Aufgabenteil (9b) bestimmten Formel um zu zeigen, dass $F_1 \wedge F_2 \models F_3$.
Erklären Sie kurz (anhand des erhaltenen Tableaus) warum $F_1 \wedge F_2 \models F_3$.

$$
\begin{array}{lcr}
1. & (\exists z\ p(z)) \wedge (\forall x\ (p(x) \rightarrow q(x)) \wedge \neg(\exists z\ q(z)) & \\
 & | & \\
2. & \exists z\ p(z) & [1_1, \alpha] \\
 & | & \\
3. & \forall x\ (p(x) \rightarrow q(x) & [1_2, \alpha] \\
 & | & \\
4. & \neg(\exists z\ q(z)) & [1_3, \alpha] \\
 & | & \\
5. & p(sk_z) & [2_1, \delta] \\
 & | & \\
6. & p(x_1) \rightarrow q(x_1) & [3_1, \gamma] \\
 & | & \\
7. & \neg q(z_1) & [4_1, \gamma]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
8. & \neg p(x_1) & [6_1, \beta] & 9. & q(x_1) & [6_2, \beta] \\
 & | & & & | & \\
 & \bot & & & \bot &
\end{array}
$$

Schluss beider Äste mit gemeinsamen mgu $\sigma = [sk_z/x_1, sk_z/z_1]$.

Da der Tableaukalkül ein Widerlegungskalkül ist, dessen Korrektheit bewiesen ist, wissen wir, dass aus dem abgeleiteten, geschlossenen Tableau folgt, dass H_1 unerfüllbar ist. Somit gilt $F_1 \wedge F_2 \models F_3$.