Sei F eine Aussagenlogische Formel mit Aussagenvariablen $\{P_1 .. P_n\}$

$$DNF(F) := \bigvee_{\substack{\mathcal{A}:\{P_1..P_n\} \to \{0,1\} \\ \mathcal{A}(F)=1}} \left(P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \dots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)}\right), \quad \text{wobei} \begin{cases} P^0 = \neg P \\ P^1 = P \end{cases}.$$

Satz: Für alle Wertebelegungen $\mathcal{A}' : \{P_1 ... P_n\} \to \{0,1\}$ gilt:
$\mathcal{A}'(F) = 1$ genau dann, wenn $\mathcal{A}(DNF(F)) = 1$.

Beweis

- Zuerst zeigen wir, dass für alle Belegungen $\mathcal{A}, \mathcal{A}' : \{P_1 .. P_n\} \to \{0,1\}$

1) $\mathcal{A}'(P_i^{\mathcal{A}(P_i)}) = 1$ genau dann, wenn $\mathcal{A}'(P_i) = \mathcal{A}(P_i)$

2) $\mathcal{A}'(P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \dots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)}) = 1$ genau dann, wenn $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.

Beweis: Seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}' : \{P_1 .. P_n\} \to \{0,1\}$ Wertebelegungen

1) Fallunterscheidung.

Fall 1: $\mathcal{A}(P_i) = 0$. Dann ist $P_i^{\mathcal{A}(P_i)} = \neg P_i$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'(P_i^{\mathcal{A}(P_i)}) = 1 \quad &\text{gdw} \quad \mathcal{A}'(\neg P_i) = 1 \\ &\text{gdw} \quad \mathcal{A}'(P_i) = 0 \\ &\text{gdw} \quad \mathcal{A}'(P_i) = \mathcal{A}(P_i). \end{aligned}$$

Fall 2: $\mathcal{A}(P_i) = 1$. Dann ist $P_i^{\mathcal{A}(P_i)} = P_i$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'(P_i^{\mathcal{A}(P_i)}) = 1 \quad &\text{gdw} \quad \mathcal{A}'(P_i) = 1 \\ &\text{gdw} \quad \mathcal{A}'(P_i) = \mathcal{A}(P_i) \end{aligned}$$

2) $$\mathcal{A}'(P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \dots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)}) = 1 \quad \text{gdw} \quad \begin{cases} \mathcal{A}'(P_1^{\mathcal{A}(P_1)}) = 1 \\ \vdots \\ \mathcal{A}'(P_n^{\mathcal{A}(P_n)}) = 1 \end{cases}$$

$$\underset{(1)}{\text{gdw}} \quad \begin{cases} \mathcal{A}'(P_1) = \mathcal{A}(P_1) \\ \vdots \\ \mathcal{A}'(P_n) = \mathcal{A}(P_n) \end{cases}$$

$$\text{gdw} \quad \mathcal{A}' = \mathcal{A}.$$

Jetzt zeigen wir, dass $\mathcal{A}'(F)=1$ gdw $\mathcal{A}'(DNF(F))=1$.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Wenn $\mathcal{A}'(F)=1$, kommt $(P_1^{\mathcal{A}'(P_1)} \wedge \dots \wedge P_n^{\mathcal{A}'(P_n)})$ in der Disjunktion in $DNF(F)$ vor.

Da $\mathcal{A}'(P_1^{\mathcal{A}'(P_1)} \wedge \dots \wedge P_n^{\mathcal{A}'(P_n)}) = 1$ (das folgt aus Bemp 2)]

ist $\mathcal{A}'(DNF(F)) = 1$.

"$\Leftarrow$" Wenn $\mathcal{A}'(DNF(F)) = 1$, dann

ist $\mathcal{A}'\Big(\bigvee_{\substack{\mathcal{A}:\{P_1 - P_n\} \to \{0,1\} \\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \dots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)}) \Big) = 1.$

also gibt es eine Wertebelegung $\mathcal{A}:\{P_1 .. P_n\} \to \{0,1\}$ mit $\mathcal{A}(F)=1$, sodass $\mathcal{A}'(P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \dots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)}) = 1$

Aber wir haben gezeigt, dass wenn $\mathcal{A}'(P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \dots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)}) = 1$, dann $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.

Da $\mathcal{A}(F)=1$, und $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, folgt es, dass $\mathcal{A}'(F)=1$.