# Logik für Informatiker

## 2. Aussagenlogik

## Teil 2

26.04.2016

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

# Bis jetzt

- Syntax (Formeln)
- Semantik

  **Wertebelegungen/Valuationen/Modelle**

  **Auswertung von Formeln / Wahrheitstabellen**

  $\mathcal{A} \models F$ g.d.w. $\mathcal{A}(F) = 1$.

  **Gültigkeit und Erfüllbarkeit**

  $F$ allgemeingültig/Tautologie:

  – $\mathcal{A}(F) = 1$ für alle Wertebelegungen $\mathcal{A}$

  $F$ erfüllbar

  – es gibt Wertebelegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$

  $F$ unerfüllbar/Kontradiktion

  – $\mathcal{A}(F) = 0$ für alle Wertebelegungen $\mathcal{A}$

# Bis jetzt

Eine Formel $F$ ist:

- erfüllbar, wenn es eine Wertebelegung $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ gibt mit $\mathcal{A}(F) = 1$.
- unerfüllbar, wenn für alle Wertebelegungen $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow$, $\mathcal{A}(F) = 0$.

# Bis jetzt

Eine Formelmenge $N$ ist:

- erfüllbar, wenn es eine Wertebelegung $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ gibt, für die alle Formeln in $N$ wahr sind (d.h. mit $\mathcal{A}(F) = 1$ für alle $F \in N$).
- unerfüllbar, wenn es keine Wertebelegung $\mathcal{A} : \Pi \to$ gibt, für die alle Formeln in $N$ wahr sind (d.h. es gibt keine Wertebelegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$ für alle $F \in N$).

### Beispiel

$N = \{P \wedge Q, \neg Q \vee R\}$ ist erfüllbar:

Für $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(R) = 1$ gilt:
$\mathcal{A}(P \wedge Q) = 1$ und $\mathcal{A}(\neg Q \vee R) = 1$ (alle Formeln in $N$ sind wahr in $\mathcal{A}$).

$N = \{P \wedge Q, \neg Q \wedge R\}$ ist nicht erfüllbar (unerfüllbar):

Für jede Wertebelegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(P \wedge Q) = 1$, ist $\mathcal{A}(Q) = 1$
Für jede Wertebelegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(\neg Q \wedge R) = 1$, ist $\mathcal{A}(Q) = 0$.

Es kann keine Wertebelegung $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ geben mit
$\mathcal{A}(P \wedge Q) = 1$ und $\mathcal{A}(\neg Q \wedge R) = 1$.

# Folgerung und Äquivalenz

**Definition:** $F$ impliziert $G$ (oder $G$ folgt aus $F$),

gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ gilt: Wenn $\mathcal{A} \models F$, dann $\mathcal{A} \models G$.

Notation: $F \models G$

**Definition:** $F$ und $G$ sind äquivalent

gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ gilt: $\mathcal{A} \models F$ gdw. $A \models G$.

Notation: $F \equiv G$.

Erweiterung auf Formelmengen $N$ in natürlicher Weise, z.B.:

$N \models G$ gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ gilt:
falls $\mathcal{A} \models F$, für alle $F \in N$,
so $\mathcal{A} \models G$.

# Folgerung und Äquivalenz

**Intuition:**

- $F$ impliziert $G$ (oder $G$ folgt aus $F$),
  gdw.: für jede Wertebelegung, für die $F$ wahr ist, auch $G$ wahr ist.

- Erweiterung auf Formelmengen $N$ in natürlicher Weise, z.B.:
  $N \models G$ gdw.: für alle Wertebelegungen, für denen alle Formeln in $N$ wahr sind, ist $G$ auch wahr.

- Zwei Formeln $F$ und $G$ sind logisch äquivalent (Notation: $F \equiv G$) wenn sie in den gleichen Modellen wahr sind

**Beispiel:** $(P \rightarrow Q) \equiv (\neg Q \rightarrow \neg P)$ (Kontraposition)

# Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

**Überprüfe, ob $F \models G$**

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \vee C)$ | $(B \vee \neg C)$ | $(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$ | $(A \vee B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | | | | |
| 0 | 0 | 1 | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | |
| 0 | 1 | 1 | | | | |
| 1 | 0 | 0 | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | |
| 1 | 1 | 0 | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | |

# Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

**Überprüfe, ob $F \models G$**

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \vee C)$ | $(B \vee \neg C)$ | $(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$ | $(A \vee B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |

# Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

**Überprüfe, ob $F \models G$**

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \vee C)$ | $(B \vee \neg C)$ | $(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$ | $(A \vee B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

**Überprüfe, ob $F \models G$:** Ja, $F \models G$

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \vee C)$ | $(B \vee \neg C)$ | $(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$ | $(A \vee B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

**Überprüfe, ob $F \models G$:** Ja, $F \models G$

.... aber es ist nicht wahr dass $G \models F$ (Notation: $G \not\models F$)

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \vee C)$ | $(B \vee \neg C)$ | $(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$ | $(A \vee B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# Tautologien und Kontradiktionen

**Tautologien, allgemeingültige Formeln:**

Formeln, die stets wahr sind.

**Kontradiktionen, unerfüllbare Formeln:**

Formel, die stets falsch sind.

- Die Negation einer Tautologie ist eine Kontradiktion
- Die Negation einer Kontradiktion ist eine Tautologie

**Theorem.** $F$ ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar.

Beweis 1: Aus der Wahrheitstafel.

Beweis 2: $F$ allgemeingültig gdw. $\mathcal{A}(F)=1$ für alle $\mathcal{A}:\Pi\to\{0,1\}$

gdw. $\mathcal{A}(\neg F)=0$ für alle $\mathcal{A}:\Pi\to\{0,1\}$ gdw. $\neg F$ unerfüllbar

# Allgemeingültigkeit/Folgerung

$F, G$ Formeln

**Theorem.** $F \models G$ gdw. $\models F \rightarrow G$.

Beweis:

$$
\begin{array}{lll}
F \models G & \text{g.d.w.} & \text{für alle } \mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0,1\}, \text{ falls } \mathcal{A}(F) = 1 \text{ so } \mathcal{A}(G) = 1 \\
 & \text{g.d.w.} & \text{für alle } \mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0,1\}, (\mathcal{A}(F) \rightarrow \mathcal{A}(G)) = 1 \\
 & \text{g.d.w.} & \text{für alle } \mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0,1\}, \mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1 \\
 & \text{g.d.w.} & \models F \rightarrow G
\end{array}
$$

# Allgemeingültigkeit/Folgerung

$F, G$ Formeln; $N$ Formelmenge.

**Theorem.** $N \cup \{F\} \models G$ gdw. $N \models F \rightarrow G$.

Beweis: "$\Rightarrow$"

Annahme: $N \cup \{F\} \models G$ d.h. für alle $\mathcal{A}$:$\Pi$$\rightarrow$$\{0,1\}$,
falls [$\mathcal{A}(H)$=1 für alle Formeln $H$$\in$$N$$\cup$$\{F\}$] so $\mathcal{A}(G)$=1.

Wir beweisen, dass $N \models F \rightarrow G$, d.h. für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0,1\}$
falls [$\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N$] so $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$.

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0,1\}$ mit $\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N$.

**Fall 1:** $\mathcal{A}(F) = 0$. Dann $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$.

**Fall 2:** $\mathcal{A}(F) = 1$, d.h. [$\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{F\}$]. Dann $\mathcal{A}(G) = 1$ und somit $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$.

# Allgemeingültigkeit/Folgerung

$F, G$ Formeln; $N$ Formelmenge.

**Theorem.** $N \cup \{F\} \models G$ gdw. $N \models F \rightarrow G$.

Beweis: "$\Leftarrow$"

Annahme: $N \models F \rightarrow G$ d.h. für alle $\mathcal{A}:\Pi\rightarrow\{0,1\}$,
falls [$\mathcal{A}(H)=1$ für alle Formeln $H\in N$] so $\mathcal{A}(F \rightarrow G)=1$.

Wir beweisen, dass $N \cup \{F\} \models G$, d.h. für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0,1\}$
falls [$\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{F\}$] so $\mathcal{A}(G) = 1$.

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0,1\}$ mit $\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{F\}$.

Dann (i) $\mathcal{A}(F) = 1$ und
(ii) [$\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N$], also $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$.

Es folgt, dass $1 = \mathcal{A}(F \rightarrow G) = (\mathcal{A}(F) \rightarrow \mathcal{A}(G)) = (1 \rightarrow \mathcal{A}(G)) = \mathcal{A}(G)$,
so $\mathcal{A}(G) = 1$.

# Allgemeingültigkeit/Folgerung

$F, G$ Formeln.

**Theorem.** $F \equiv G$ gdw. $\models F \leftrightarrow G$.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
F \equiv G \quad & \text{g.d.w. für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\},\ \mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G) \\
& \text{g.d.w. für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\},\ (\mathcal{A}(F) \leftrightarrow \mathcal{A}(G)) = 1 \\
& \text{g.d.w. für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\},\ \mathcal{A}(F \leftrightarrow G) = 1 \\
& \text{g.d.w. } \models F \leftrightarrow G
\end{aligned}
$$

# Allgemeingültigkeit/Folgerung: Zusammenfassung

$F$, $G$ Formeln; $N$ Formelmenge.

**Theorem.** $F \models G$ gdw. $\models F \to G$.

**Theorem.** $N \cup \{F\} \models G$ gdw. $N \models F \to G$.

**Theorem.** $F \equiv G$ gdw. $\models F \leftrightarrow G$.

# Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung

$F$, $G$ Formeln.

**Theorem.** $F$ ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar.

Beweis F wahr für jede Wertebelegung gdw. $\neg F$ falsch für jede Wertebelegung.

**Theorem.** $F \models G$ gdw. $F \wedge \neg G$ ist unerfüllbar.

Beweis:

$$\begin{array}{lll} F \models G & \text{gdw.} & \models F \rightarrow G \quad \text{d.h. } F \rightarrow G \text{ allgemeingültig} \\ & \text{gdw.} & \neg(F \rightarrow G) \text{ unerfüllbar.} \\ & \text{gdw.} & F \wedge \neg G \text{ unerfüllbar.} \end{array}$$

... da $\neg(F \rightarrow G) \equiv \neg(\neg F \vee G) \equiv \neg\neg F \wedge \neg G \equiv F \wedge \neg G$.

# Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung

$F, G$ Formeln; $N$ Formelmenge.

**Theorem.** $N \models G$ gdw. $N \cup \{\neg G\}$ ist unerfüllbar.

Beweis: "$\Rightarrow$"

Annahme: $N \models G$ d.h. für alle $\mathcal{A}{:}\Pi{\rightarrow}\{0,1\}$,
falls [$\mathcal{A}(H){=}1$ für alle Formeln $H{\in}N$] so $\mathcal{A}(G){=}1$.

Zu zeigen: $N \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar.

Beweis durch Widerspruch: Wir nehmen an, $N \cup \{\neg G\}$ erfüllbar,
d.h. es gibt $\mathcal{A}{:}\Pi{\rightarrow}\{0,1\}$, mit
[$\mathcal{A}(H){=}1$ für alle Formeln $H{\in}N \cup \{\neg G\}$].

Dann [$\mathcal{A}(H){=}1$ für alle Formeln $H{\in}N$] und $\mathcal{A}(\neg G) = 1$ (d.h. $\mathcal{A}(G) = 0$). Widerspruch.

# Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung

$F, G$ Formeln; $N$ Formelmenge.

**Theorem.** $N \models G$ gdw. $N \cup \{\neg G\}$ ist unerfüllbar.

Beweis: "$\Leftarrow$"

Annahme: $N \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar.

Zu zeigen: $N \models G$ d.h. für alle $\mathcal{A}{:}\Pi{\rightarrow}\{0,1\}$,
falls [$\mathcal{A}(H){=}1$ für alle Formeln $H{\in}N$] so $\mathcal{A}(G){=}1$.

Beweis: Sei $\mathcal{A}{:}\Pi{\rightarrow}\{0,1\}$, mit [$\mathcal{A}(H){=}1$ für alle Formeln $H{\in}N$].

Falls $\mathcal{A}(G) = 0$, wäre $\mathcal{A}$ ein Modell für $N \cup \{\neg G\}$. Das ist aber unmöglich, da wir angenommen haben, dass $N \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar ist.

Es folgt, dass $\mathcal{A}(G) = 1$.

# Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung: Zusammenfassung

$F$, $G$ Formeln; $N$ Formelmenge.

**Theorem.** $F$ ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar.

**Theorem.** $F \models G$ gdw. $F \wedge \neg G$ ist unerfüllbar.

**Theorem.** $N \models G$ gdw. $N \cup \{\neg G\}$ ist unerfüllbar.

Nota bene: falls $N$ unerfüllbar, so $N \models G$ für jede Formel $G$
... auch für $\perp$.

**Notation:** $N \models \perp$ für $N$ unerfüllbar.

# Erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

**Erfüllbarkeitstest:**

Jede Formel $F$ enthält endlich viele Aussagenvariablen.
$\mathcal{A}(F)$ ist nur von den Werten dieser Aussagenvariablen abhängig.

$F$ enthält $n$ Aussagenvariablen:

$\Rightarrow 2^n$ Wertbelegungen notwendig um zu überprüfen, ob $F$ erfüllbar ist oder nicht.

$\Rightarrow$ Wahrheitstafel

$\Rightarrow$ Das Erfüllbarkeitsproblem ist entscheidbar

Es existieren viel bessere Methoden als Wahrheitstafeltests um die Erfüllbarkeit einer Formel zu überprüfen.

# Ein zweiter Kalkül

Ein zweiter Kalkül: Äquivalenzumformung

- (Wiederholte) Ersetzung einer (Unter-)Formel durch äquivalente Formel

# Äquivalenz

Zwei Formeln $F$ und $G$ sind logisch äquivalent (Notation: $F \equiv G$) wenn sie in den gleichen Modellen wahr sind

**Beispiel:** $(P \to Q) \equiv (\neg Q \to \neg P)$ (Kontraposition)

# Wichtige Äquivalenzen

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Formeln $F, G, H$ gültig:

$$\begin{aligned}
(F \wedge F) &\equiv F \\
(F \vee F) &\equiv F && \text{(Idempotenz)} \\[1ex]
(F \wedge G) &\equiv (G \wedge F) \\
(F \vee G) &\equiv (G \vee F) && \text{(Kommutativität)} \\[1ex]
(F \wedge (G \wedge H)) &\equiv ((F \wedge G) \wedge H) \\
(F \vee (G \vee H)) &\equiv ((F \vee G) \vee H) && \text{(Assoziativität)} \\[1ex]
(F \wedge (F \vee G)) &\equiv F \\
(F \vee (F \wedge G)) &\equiv F && \text{(Absorption)} \\[1ex]
(F \wedge (G \vee H)) &\equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H)) \\
(F \vee (G \wedge H)) &\equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H)) && \text{(Distributivität)}
\end{aligned}$$

# Wichtige Äquivalenzen

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Formeln $F, G, H$ gültig:

$$(\neg\neg F) \equiv F \qquad \text{(Doppelte Negation)}$$

$$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$$

$$\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G) \qquad \text{(De Morgan's Regeln)}$$

$$(F \rightarrow G) \equiv (\neg G \rightarrow \neg F) \qquad \text{(Kontraposition)}$$

$$(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G) \qquad \text{(Elimination Implikation)}$$

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \qquad \text{(Elimination Äquivalenz)}$$

# Wichtige Äquivalenzen

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Formeln $F, G, H$ gültig:

$(F \wedge G) \equiv F$, falls $G$ Tautologie

$(F \vee G) \equiv \top$, falls $G$ Tautologie (Tautologieregeln)

$(F \wedge G) \equiv \bot$, falls $G$ unerfüllbar

$(F \vee G) \equiv F$, falls $G$ unerfüllbar (Tautologieregeln)

# Wichtige Äquivalenzen mit $\top/\bot$

$(A \land \neg A) \equiv \bot$

$(A \lor \neg A) \equiv \top$ (Tertium non datur)

$(A \land \top) \equiv A$

$(A \land \bot) \equiv \bot$

# Wichtige Äquivalenzen (Zusammengefasst)

| | | |
|---|---|---|
| $(F \wedge F) \equiv F$ | $(F \vee F) \equiv F$ | (Idempotenz) |
| $(F \wedge G) \equiv (G \wedge F)$ | $(F \vee G) \equiv (G \vee F)$ | (Kommutativität) |
| $(F \wedge (G \wedge H)) \equiv ((F \wedge G) \wedge H)$<br>$(F \vee (G \vee H)) \equiv ((F \vee G) \vee H)$ | | (Assoziativität) |
| $(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$<br>$(F \vee (F \wedge G)) \equiv F$ | | (Absorption) |
| $(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$<br>$(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$ | | (Distributivität) |
| $(\neg\neg F) \equiv F$ | | (Doppelte Negation) |
| $\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$<br>$\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$ | | (De Morgan's Regeln) |
| $(F \rightarrow G) \equiv (\neg G \rightarrow \neg F)$ | | (Kontraposition) |
| $(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G)$ | | (Elimination Implikation) |
| $F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$ | | (Elimination Äquivalenz) |

# Zusammenfassung

- Syntax (Formeln)
- Semantik

    Wertebelegungen (Valuationen, Modelle)

    Wahrheitstafel für die logischen Operatoren

    Auswertung von Formeln / Wahrheitstabellen

    Modell einer Formel(menge)

    Gültigkeit und Erfüllbarkeit

    Tautologien und Kontradiktionen

    Folgerung und Äquivalenz

- Erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode
- Zweiter Kalkül: Äquivalenzumformung

    Bis jetzt: Wichtige Äquivalenzen