Logik für Informatiker

2. Aussagenlogik

Teil 4

3.05.2016

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

- Syntax (Formeln)
- Semantik

  Wertebelegungen (Valuationen, Modelle)

  Wahrheitstafel für die logischen Operatoren

  Auswertung von Formeln / Wahrheitstabellen

  Modell einer Formel(menge)

  Gültigkeit und Erfüllbarkeit

  Tautologien und Kontradiktionen

  Folgerung und Äquivalenz

  Erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

  Zweiter Kalkül: Äquivalenzumformung

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit

(für Formeln und/oder Formelmengen)

Dazu brauchen wir "Normalformen"

Normalformen

Definition:

- Atom: aussagenlogische Variable
- Literal: Atom, oder

  Negation eines Atoms

Klausel: Eine Disjunktion von Literalen

- mehrstellige Disjunktionen $(P \vee \neg Q \vee R)$, $(P \vee P \vee \neg Q)$
- einstellige Disjunktionen P
- die nullstellige Disjunktion (leere Klausel) $\perp$

Konjunktive Normalform (KNF): Eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, d.h., eine Konjunktion von Klauseln

Disjunktive Normalform (DNF): Eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen.

Normalformen

Eigenschaften:

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es:
  - eine äquivalente Formel in KNF
  - eine äquivalente Formel in DNF
- Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig
- Solche Formeln können aus einer Wahrheitstafel abgelesen werden
- Solche Formeln können durch Umformungen hergestellt werden

Beispiel

$F: \quad (P \vee Q) \wedge ((\neg P \wedge Q) \vee R)$

P	Q	R	$(P \vee Q)$	$\neg P$	$(\neg P \wedge Q)$	$((\neg P \wedge Q) \vee R)$	F	$\neg F$
0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0

DNF für F: $(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

DNF für $\neg F$: $(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$

KNF für F: $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

Normalformen

DNF für F:

$$\bigvee_{\substack{\mathcal{A}:\{P_1,\ldots,P_n\}\to\{0,1\}\\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \cdots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)})$$

wobei: $P^0 = \neg P$ und $P^1 = P$

Theorem. Für alle Wertebelegungen $\mathcal{A}' : \{P_1, \ldots, P_n\} \to \{0, 1\}$:

$$\mathcal{A}'(F) = 1 \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{A}'\Big(\bigvee_{\substack{\mathcal{A}:\{P_1,\ldots,P_n\}\to\{0,1\}\\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \cdots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)})\Big) = 1.$$

KNF für F : $\neg F'$, wobei F' die DNF von $\neg F$ ist.

KNF für F:

$$\bigwedge_{\substack{\mathcal{A}:\{P_1,\ldots,P_n\}\to\{0,1\}\\ \mathcal{A}(F)=0}} (P_1^{1-\mathcal{A}(P_1)} \vee \cdots \vee P_n^{1-\mathcal{A}(P_n)})$$

Normalformen

Eigenschaften:

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es:
  - eine äquivalente Formel in KNF
  - eine äquivalente Formel in DNF
- Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig
- Solche Formeln können aus einer Wahrheitstafel abgelesen werden
- Solche Formeln können durch Umformungen hergestellt werden

Umformung in KNF

Vier Schritte:

Umformung in KNF

Vier Schritte:

1. Elimination von $\leftrightarrow$

   Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Umformung in KNF

Vier Schritte:

1. Elimination von $\leftrightarrow$

   Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von $\rightarrow$

   Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

Umformung in KNF

Vier Schritte:

1. Elimination von $\leftrightarrow$

   Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von $\rightarrow$

   Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

3. "Nach innen schieben" von $\neg$

   Verwende de Morgans Regeln und $\neg\neg A \equiv A$

   $\mapsto$ Negationsnormalform (NNF)

Eine logische Formel ist in Negationsnormalform (NNF), falls die Negationsoperatoren in ihr nur direkt über atomaren Aussagen vorkommen.

Umformung in KNF

Vier Schritte:

1. Elimination von $\leftrightarrow$

   Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von $\rightarrow$

   Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

3. "Nach innen schieben" von $\neg$

   Verwende de Morgans Regeln und $\neg\neg A \equiv A$ (NNF)

4. "Nach innen schieben" von $\vee$

   Verwende Distributivität von $\vee$ über $\wedge$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Elimination von $\leftrightarrow$

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((Q \vee R) \rightarrow P)$$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Elimination von $\leftrightarrow$

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((Q \vee R) \rightarrow P)$$

2. Elimination von $\rightarrow$

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg (Q \vee R) \vee P)$$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Elimination von $\leftrightarrow$

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((Q \vee R) \rightarrow P)$$

2. Elimination von $\rightarrow$

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg(Q \vee R) \vee P)$$

3. "Nach innen schieben" von $\neg$ (NNF)

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)$$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Elimination von $\leftrightarrow$

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((Q \vee R) \rightarrow P)$$

2. Elimination von $\rightarrow$

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg(Q \vee R) \vee P)$$

3. "Nach innen schieben" von $\neg$ (NNF)

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)$$

4. "Nach innen schieben" von $\vee$

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee P) \wedge (\neg R \vee P)$$

Umformung in DNF

Vier Schritte:

1. Elimination von $\leftrightarrow$

   Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von $\rightarrow$

   Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

3. “Nach innen schieben” von $\neg$

   Verwende de Morgans Regeln und $\neg\neg A \equiv A$ (NNF)

4. “Nach innen schieben” von $\wedge$

   Verwende Distributivität von $\wedge$ über $\vee$

Umformung in DNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Negationsnormalform (NNF) (s. Seite 18):

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)$$

2. "Nach innen schieben" von $\wedge$

$$
\begin{array}{rl}
 & (\neg P \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)) \vee (Q \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)) \vee (R \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)) \\
\equiv & (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge P) \quad \vee \quad (Q \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (Q \wedge P) \quad \vee \\
 & (R \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (R \wedge P) \\
\equiv & (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee \underbrace{(\neg P \wedge P)}_{\equiv \bot} \quad \vee \quad (\underbrace{(Q \wedge \neg Q)}_{\equiv \bot} \wedge \neg R) \vee (Q \wedge P) \quad \vee \\
 & (\underbrace{(R \wedge \neg R)}_{\equiv \bot} \wedge \neg Q) \vee (R \wedge P) \\
\equiv & (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (Q \wedge P) \vee (R \wedge P)
\end{array}
$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \land P_{12}) \lor \cdots \lor (P_{n1} \land P_{n2})$$

$$\begin{aligned}
n = 1 : A_1 &= P_{11} \land P_{12} && \text{Länge: } 2 = 2^1 \\
n = 2 : A_2 &= (P_{11} \land P_{12}) \lor (P_{21} \land P_{22}) \\
&\equiv ((P_{11} \land P_{12}) \lor P_{21}) \land ((P_{11} \land P_{12}) \lor P_{22}) \\
&\equiv (P_{11} \lor P_{21}) \land (P_{12} \lor P_{21}) \land (P_{11} \lor P_{22}) \land (P_{12} \lor P_{22}) && \text{Länge: } 2 \cdot 2 = 2^2
\end{aligned}$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

$$\begin{aligned}
n = 1 : A_1 &= P_{11} \wedge P_{12} && \text{Länge: } 2 = 2^1 \\
n = 2 : A_2 &= (P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22}) \\
&\equiv ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{21}) \wedge ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{22}) \\
&\equiv (P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}) && \text{Länge: } 2 \cdot 2 = 2^2 \\
n = 3 : A_3 &= \underbrace{(P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22})}_{A_2} \vee (P_{31} \wedge P_{32}) \\
&\equiv \underbrace{((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}))}_{KNF(A_2)} \vee (P_{31} \wedge P_{32})
\end{aligned}$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \land P_{12}) \lor \cdots \lor (P_{n1} \land P_{n2})$$

$$\begin{aligned}
n = 1 : A_1 &= P_{11} \land P_{12} && \text{Länge: } 2 = 2^1 \\
n = 2 : A_2 &= (P_{11} \land P_{12}) \lor (P_{21} \land P_{22}) \\
&\equiv ((P_{11} \land P_{12}) \lor P_{21}) \land ((P_{11} \land P_{12}) \lor P_{22}) \\
&\equiv (P_{11} \lor P_{21}) \land (P_{12} \lor P_{21}) \land (P_{11} \lor P_{22}) \land (P_{12} \lor P_{22}) && \text{Länge: } 2 \cdot 2 = 2^2 \\
n = 3 : A_3 &= \underbrace{(P_{11} \land P_{12}) \lor (P_{21} \land P_{22})}_{A_2} \lor (P_{31} \land P_{32}) \\
&\equiv \underbrace{((P_{11} \lor P_{21}) \land (P_{12} \lor P_{21}) \land (P_{11} \lor P_{22}) \land (P_{12} \lor P_{22}))}_{KNF(A_2)} \lor (P_{31} \land P_{32}) \\
&\equiv (((P_{11} \lor P_{21}) \land (P_{12} \lor P_{21}) \land (P_{11} \lor P_{22}) \land (P_{12} \lor P_{22})) \lor P_{31}) \land \\
&\quad (((P_{11} \lor P_{21}) \land (P_{12} \lor P_{21}) \land (P_{11} \lor P_{22}) \land (P_{12} \lor P_{22})) \lor P_{32})
\end{aligned}$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \land P_{12}) \lor \cdots \lor (P_{n1} \land P_{n2})$$

$$\begin{aligned}
n = 1 : A_1 &= P_{11} \land P_{12} && \text{Länge: } 2^1 \\
n = 2 : A_2 &= (P_{11} \land P_{12}) \lor (P_{21} \land P_{22}) \\
&\equiv ((P_{11} \land P_{12}) \lor P_{21}) \land ((P_{11} \land P_{12}) \lor P_{22}) \\
&\equiv (P_{11} \lor P_{21}) \land (P_{12} \lor P_{21}) \land (P_{11} \lor P_{22}) \land (P_{12} \lor P_{22}) && \text{Länge: } 2^2 \\
n = 3 : A_3 &= \underbrace{(P_{11} \land P_{12}) \lor (P_{21} \land P_{22})}_{A_2} \lor (P_{31} \land P_{32}) \\
&\equiv \underbrace{((P_{11} \lor P_{21}) \land (P_{12} \lor P_{21}) \land (P_{11} \lor P_{22}) \land (P_{12} \lor P_{22}))}_{KNF(A_2)} \lor (P_{31} \land P_{32}) \\
&\equiv (((P_{11} \lor P_{21}) \land (P_{12} \lor P_{21}) \land (P_{11} \lor P_{22}) \land (P_{12} \lor P_{22})) \lor P_{31}) \land \\
&\quad\ (((P_{11} \lor P_{21}) \land (P_{12} \lor P_{21}) \land (P_{11} \lor P_{22}) \land (P_{12} \lor P_{22})) \lor P_{32}) \\
&\equiv (((P_{11} \lor P_{21} \lor P_{31}) \land (P_{12} \lor P_{21} \lor P_{31}) \land (P_{11} \lor P_{22} \lor P_{31}) \land (P_{12} \lor P_{22} \lor P_{31}) \land \\
&\quad\ (((P_{11} \lor P_{21} \lor P_{32}) \land (P_{12} \lor P_{21} \lor P_{32}) \land (P_{11} \lor P_{22} \lor P_{32}) \land (P_{12} \lor P_{22} \lor P_{32}) && \text{Länge: } 2^3
\end{aligned}$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \dots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

Zu A_n äquivalente KNF

$$\bigwedge_{f:\{1,\dots,n\}\rightarrow\{1,2\}} (P_{1,f(1)} \vee \dots \vee P_{n,f(n)})$$

Größe der KNF:

- Klausel in KNF von A_n: 2^n

Beweis: Induktion

Sei $f(n)$ die Anzahl der Klausel in KNF für A_n.

$f(1) = 2$

$f(n+1) = 2f(n)$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben: $A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$

- Klausel in KNF von A_n: 2^n

Beweis durch Induktion

Induktionsbasis: $n = 1 : A_1$ in KNF, 2^1 Klausel.

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben: $A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$

- Klausel in KNF von A_n: 2^n

Beweis durch Induktion

Induktionsvoraussetzung: KNF von A_n hat 2^n Klausel

$$KNF(A_n) = C_1 \wedge \cdots \wedge C_{2^n},\ C_i = (L^i_1 \vee \cdots \vee L^i_{n_i}) \text{ Klausel}$$

Induktionsschritt: Zu zeigen: KNF von A_{n+1} hat 2^{n+1} Klausel

$$\begin{aligned}
A_{n+1} = \quad & (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2}) \vee (P_{(n+1),1} \wedge P_{(n+1),2}) \\
\equiv \quad & \underbrace{((P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2}))}_{A_n} \vee (P_{(n+1),1} \wedge P_{(n+1),2}) \\
\equiv \quad & \underbrace{(C_1 \wedge \cdots \wedge C_{2^n})}_{KNF(A_n)} \vee (P_{(n+1),1} \wedge P_{(n+1),2}) \\
\equiv \quad & ((C_1 \wedge \cdots \wedge C_{2^n}) \vee P_{(n+1),1}) \wedge ((C_1 \wedge \cdots \wedge C_{2^n}) \vee P_{(n+1),2}) \\
\equiv \quad & (C_1 \vee P_{(n+1),1}) \wedge \cdots \wedge (C_{2^n} \vee P_{(n+1),1}) \wedge (C_1 \vee P_{(n+1),2}) \wedge \cdots \wedge (C_{2^n} \vee P_{(n+1),2})
\end{aligned}$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben: $A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$

- Klausel in KNF von A_n: 2^n

Beweis durch Induktion

Induktionsvoraussetzung: KNF von A_n hat 2^n Klausel

$$KNF(A_n) = C_1 \wedge \cdots \wedge C_{2^n},\ C_i = (L_1^i \vee \cdots \vee L_{n_i}^i) \text{ Klausel}$$

Induktionsschritt: Zu zeigen: KNF von A_{n+1} hat 2^{n+1} Klausel

$$\begin{aligned}
A_{n+1} = \quad & (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2}) \vee (P_{(n+1),1} \wedge P_{(n+1),2}) \\
\equiv \quad & \underbrace{((P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2}))}_{A_n} \vee (P_{(n+1),1} \wedge P_{(n+1),2}) \\
\equiv \quad & \underbrace{(C_1 \wedge \cdots \wedge C_{2^n})}_{KNF(A_n)} \vee (P_{(n+1),1} \wedge P_{(n+1),2}) \\
\equiv \quad & ((C_1 \wedge \cdots \wedge C_{2^n}) \vee P_{(n+1),1}) \wedge ((C_1 \wedge \cdots \wedge C_{2^n}) \vee P_{(n+1),2}) \\
\equiv \quad & \underbrace{(C_1 \vee P_{(n+1),1}) \wedge \cdots \wedge (C_{2^n} \vee P_{(n+1),1})}_{2^n} \wedge \underbrace{(C_1 \vee P_{(n+1),2}) \wedge \cdots \wedge (C_{2^n} \vee P_{(n+1),2})}_{2^n}
\end{aligned}$$

KNF: Mengenschreibweise

Notation:

Klausel als Menge von Literalen

Formel in KNF als Menge von Klauseln

KNF: Mengenschreibweise

Notation:

Klausel als Menge von Literalen

Formel in KNF als Menge von Klauseln

Beispiel:

$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

$\{\ \ \{P, Q, R\},\ \ \{P, Q, \neg R\},\ \ \{\neg P, Q, R\},\ \ \{\neg P, \neg Q, R\}\ \ \}$

KNF: Mengenschreibweise

Bedeutung der leeren Menge

- Leere Klausel

  $=$ leere Menge von Literalen

  $=$ leere Disjunktion

  $= \perp$

KNF: Mengenschreibweise

Bedeutung der leeren Menge

- Leere Klausel

  $=$ leere Menge von Literalen

  $=$ leere Disjunktion

  $= \bot$

- Leere Menge von Klausels

  $=$ leere Konjunktion

  $= \top$

Vereinfachung der KNF: Subsumption

Theorem (Subsumption Regel)
Enthält eine KNF-Formel (= Klauselmenge) Klauseln K, K' mit

$$K \subset K'$$

dann entsteht eine äquivalente Formel, wenn K' weggelassen wird.

Vereinfachung der KNF: Subsumption

Theorem (Subsumption Regel)
Enthält eine KNF-Formel (= Klauselmenge) Klauseln K, K' mit

$$K \subset K'$$

dann entsteht eine äquivalente Formel, wenn K' weggelassen wird.

Beweis:

$K = \{L_1, \ldots, L_p\} \subseteq \{L_1, \ldots, L_p, L_{p+1}, \ldots, L_m\} = K'$

F enthält $K \wedge K'$

$$\begin{aligned} K \wedge K' = \quad & (L_1 \vee \cdots \vee L_p) \wedge ((L_1 \vee \cdots \vee L_p) \vee L_{p+1} \vee \ldots L_m) \\ \equiv \quad & (L_1 \vee \cdots \vee L_p) = K \qquad \text{(Absorption)} \end{aligned}$$

Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

Definition: SAT-Problem

Gegeben:	Eine aussagenlogische Formel F
Frage:	Ist F erfüllbar?

Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

Definition: SAT-Problem

Gegeben:	Eine aussagenlogische Formel F
Frage:	Ist F erfüllbar?

Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

Definition: SAT-Problem

Gegeben:	Eine aussagenlogische Formel F
Frage:	Ist F erfüllbar?

NB: F allgemeingültig gdw. $\neg F$ nicht erfüllbar

Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

Erfüllbarkeitsproblem für DNF Formeln

Sei $F = \bigvee_{i=1}^{n} (\bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij})$ in DNF

F unerfüllbar gdw. $(\bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij})$ unerfüllbar für alle $i = 1, \dots, n$

gdw. $(\bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij})$ enthält zwei komplementare Literale für alle i

Beispiele:

$$\underbrace{(P \wedge \neg Q)}_{\text{erfüllbar}} \vee \underbrace{(P \wedge Q \wedge \neg R \wedge \neg Q)}_{\text{unerfüllbar}} \quad \text{erfüllbar}$$

$$\underbrace{(P \wedge \neg Q \wedge \neg P)}_{\text{unerfüllbar}} \vee \underbrace{(P \wedge Q \wedge \neg R \wedge \neg Q)}_{\text{unerfüllbar}} \quad \text{unerfüllbar}$$

Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

Erfüllbarkeitsproblem für DNF Formeln

Sei $F = \bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij})$ in DNF

F unerfüllbar gdw. $(\bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij})$ unerfüllbar für alle $i = 1, \ldots, n$

gdw. $(\bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij})$ enthält zwei komplementare Literale für alle i

Allgemeingültigkeit für KNF Formeln

$F = \bigwedge_{i=1}^{n}(\bigvee_{j=1}^{m} L_{ij})$ in KNF ist allgemeingültig gdw. jede Disjunktion $\bigvee_{j=1}^{m} L_{ij}$ zwei komplementare Literale enthält.

Beispiele:

$$\underbrace{(P \vee \neg Q)}_{\text{erfüllbar (keine Tautologie)}} \wedge \underbrace{(P \vee Q \vee \neg R \vee \neg Q)}_{\text{Tautologie}}$$ keine Tautologie (nicht allgemeingültig)

$$\underbrace{(P \vee \neg Q \vee \neg P)}_{\text{Tautologie}} \wedge \underbrace{(P \vee Q \vee \neg R \vee \neg Q)}_{\text{Tautologie}}$$ Tautologie (allgemeingültig)

Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

Definition: SAT-Problem

Gegeben:	Eine aussagenlogische Formel F
Frage:	Ist F erfüllbar?

Theorem (ohne Beweis)
SAT ist ein NP-vollständiges Problem

NP

Zur Erinnerung:

- P ist die Klasse aller Probleme, die in polynomieller Zeit entscheidbar sind.

NP

Zur Erinnerung:

- P ist die Klasse aller Probleme, die in polynomieller Zeit entscheidbar sind.
- NP ist die Klasse aller Probleme, die nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbar sind.

NP

Zur Erinnerung:

- P ist die Klasse aller Probleme, die in polynomieller Zeit entscheidbar sind.
- NP ist die Klasse aller Probleme, die nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbar sind.

Ein Entscheidungsproblem ist genau dann in NP, wenn eine gegebene Lösung für das entsprechende Suchproblem in Polynomialzeit überprüft werden kann.

NP

Zur Erinnerung:

- P ist die Klasse aller Probleme, die in polynomieller Zeit entscheidbar sind.
- NP ist die Klasse aller Probleme, die nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbar sind.

Ein Entscheidungsproblem ist genau dann in NP, wenn eine gegebene Lösung für das entsprechende Suchproblem in Polynomialzeit überprüft werden kann.

SAT ist in NP:

- Rate eine "Lösung" (Interpretation $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$)
- Überprüfe, ob $\mathcal{A}$ wirklich eine "Lösung" ist (i.e. ob $\mathcal{A}(F) = 1$)

kann in Polynomialzeit überprüft werden

NP-Vollständigkeit

Zur Erinnerung:

"SAT ist NP-vollständig" heißt:

- SAT ist nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbar

NP-Vollständigkeit

Zur Erinnerung:

"SAT ist NP-vollständig" heißt:

- SAT ist nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbar
- Jedes nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbare Problem kann in polynomieller Zeit auf SAT reduziert werden

NP-Vollständigkeit

Zur Erinnerung:

"SAT ist NP-vollständig" heißt:

- SAT ist nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbar
- Jedes nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entscheidbare Problem kann in polynomieller Zeit auf SAT reduziert werden
- Wenn es stimmt, dass $NP \neq P$, dann ist SAT nicht in polynomieller Zeit entscheidbar

Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

Definition:

k-KNF Formel: KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens k Literale haben

Beispiele:

$P \wedge \neg Q$	1-KNF
$P \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (R \vee \neg Q)$	2-KNF
$(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$	3-KNF

Alternative Definition (nicht allgemeiner):

k-KNF Formel: KNF-Formeln, deren Klauseln genau k Literale haben

Beispiele:

$P \wedge \neg Q$	1-KNF
$(P \vee P) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (R \vee \neg Q)$	2-KNF
$(P \vee P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$	3-KNF

Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

Definition:

k-KNF Formel: KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens k Literale haben

Theorem

- Erfüllbarkeit für Formeln in KNF: NP-vollständig (ohne Beweis)

Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

Definition:

k-KNF Formel: KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens k Literale haben

Theorem

- Erfüllbarkeit für Formeln in KNF: NP-vollständig (ohne Beweis)
- Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF: NP-vollständig (Beweisidee)

3-SAT

Theorem

Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT) ist NP-vollständig

Beweis

- 3-SAT ist ein Spezialfall von SAT und deshalb wie SAT in NP.
- Um zu zeigen, dass 3-SAT ebenfalls NP-vollständig ist, müssen wir zeigen, dass jedes SAT Problem in polynomieller Zeit auf das 3-SAT Problem reduzierbar ist.

3-SAT

Theorem

Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT) ist NP-vollständig

Beweis (Teil 2)

Wir zeigen, dass jedes SAT Problem in polynomieller Zeit auf das 3-SAT Problem reduzierbar ist.

Gegeben sei eine Formel F in KNF. Wir transformieren F in eine Formel F' in 3-KNF, so dass:

$$F \text{ ist erfüllbar gdw. } F' \text{ ist erfüllbar.}$$

Eine k-Klausel sei eine Klausel mit k Literalen.

Aus einer 1- bzw 2-Klausel können wir leicht eine äquivalente 3-Klausel machen, indem wir ein Literal wiederholen.

Was machen wir mit k-Klauseln für $k > 3$?

3-SAT

Theorem

Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT) ist NP-vollständig

Beweis (Teil 3)

Sei C beispielsweise eine 4-Klausel der Form

$$C = L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee L_4.$$

In einer Klauseltransformation ersetzen wir C durch die Teilformel

$$C_0 = (L_1 \vee L_2 \vee H) \wedge (\neg H \vee L_3 \vee L_4),$$

wobei H eine zusätzlich eingeführte Hilfsvariable bezeichnet.

Beispiel

$$C = P \vee \neg Q \vee \neg R \vee S \quad \mapsto \quad (P \vee \neg Q \vee H) \wedge (\neg H \vee \neg R \vee S).$$

3-SAT

Theorem
Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT) ist NP-vollständig

Beweis (Teil 3)

Sei C beispielsweise eine 4-Klausel der Form

$$C = L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee L_4.$$

In einer Klauseltransformation ersetzen wir C durch die Teilformel

$$C_0 = (L_1 \vee L_2 \vee H) \wedge (\neg H \vee L_3 \vee L_4),$$

wobei H eine zusätzlich eingeführte Hilfsvariable bezeichnet.

F' sei aus F entstanden durch Ersetzung von C durch C_0.

zu zeigen: F' erfüllbar gdw. F erfüllbar

3-SAT

Theorem
Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT) ist NP-vollständig

Beweis (Teil 4)

$$C = L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee L_4; \quad C_0 = (L_1 \vee L_2 \vee H) \wedge (\neg H \vee L_3 \vee L_4),$$

F' sei aus F entstanden durch Ersetzung von C durch C_0.

zu zeigen: F' erfüllbar gdw. F erfüllbar

"$\Leftarrow$"

Sei $\mathcal{A}$ eine erfüllende Belegung für F. $\mathcal{A}$ weist mindestens einem Literal aus C den Wert 1 zu. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1) Falls L_1 oder L_2 den Wert 1 haben, so ist F' für $\mathcal{A}(H) = 0$ erfüllt.
2) Falls L_3 oder L_4 den Wert 1 haben, so ist F' für $\mathcal{A}(H) = 1$ erfüllt.

Also ist F' in beiden Fällen erfüllbar.

3-SAT

Theorem

Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT) ist NP-vollständig

Beweis (Teil 5)

$$C = L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee L_4; \quad C_0 = (L_1 \vee L_2 \vee H) \wedge (\neg H \vee L_3 \vee L_4),$$

F' sei aus F entstanden durch Ersetzung von C durch C_0.

zu zeigen: F' erfüllbar gdw. F erfüllbar

"$\Rightarrow$"

Sei $\mathcal{A}$ eine erfüllende Belegung für F'. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1) Falls $\mathcal{A}(H) = 0$, so muss $\mathcal{A}(L_1) = 1$ oder $\mathcal{A}(L_2) = 1$.
2) Falls $\mathcal{A}(H) = 1$, so muss $\mathcal{A}(L_3) = 1$ oder $\mathcal{A}(L_4) = 1$

In beiden Fällen erfüllt $\mathcal{A}$ somit auch C, i.e. auch F.

3-SAT

Theorem

Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT) ist NP-vollständig

Beweis (Teil 6)

Wir verallgemeinern die Klauseltransformation für $k \geq 4$:

Jede Klausel der Form

$$L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_{k-1} \vee L_k$$

wird durch eine Formel der Form

$$(L_1 \vee L_2 \vee ... \vee L_{k-2} \vee H) \wedge (\neg H \vee L_{k-1} \vee L_k)$$

ersetzt.

Die Erfüllbarkeitsäquivalenz folgt analog zum Fall $k = 4$.

Beispiele

Beispiel 1:

$$
\begin{aligned}
& (P \vee \neg Q \vee R \vee S \vee U \vee \neg V) \\
\mapsto\quad & (P \vee \neg Q \vee R \vee S \vee H_1) \wedge (\neg H_1 \vee U \vee \neg V) \\
\mapsto\quad & (P \vee \neg Q \vee R \vee H_2) \wedge (\neg H_2 \vee S \vee H_1) \wedge (\neg H_1 \vee U \vee \neg V) \\
\mapsto\quad & (P \vee \neg Q \vee H_3) \wedge (\neg H_3 \vee R \vee H_2) \wedge \\
& (\neg H_2 \vee S \vee H_1) \wedge (\neg H_1 \vee U \vee \neg V)
\end{aligned}
$$

Beispiel 2:

$$
\begin{aligned}
& (P \vee \neg Q \vee \neg R \vee S) \wedge (\neg P \vee Q \vee R \vee \neg S) \\
\mapsto\quad & (P \vee \neg Q \vee H_1) \wedge (\neg H_1 \vee \neg R \vee S) \wedge (\neg P \vee Q \vee R \vee \neg S) \\
\mapsto\quad & (P \vee \neg Q \vee H_1) \wedge (\neg H_1 \vee \neg R \vee S) \wedge (\neg P \vee Q \vee H_2) \wedge (\neg H_2 \vee R \vee \neg S)
\end{aligned}
$$

Bis jetzt

- Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)
- Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

  k-KNF Formel: KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens k Literale haben

Theorem

- Erfüllbarkeit für Formeln in KNF: NP-vollständig (ohne Beweis)
- Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF (3-SAT): NP-vollständig
- Erfüllbarkeit für Formeln in 2-KNF: polynomiell entscheidbar

  (eine der nächsten Vorlesungen)
- Erfüllbarkeit für Formeln in DNF: polynomiell entscheidbar

  $F = \bigvee_{i=1}^{n} (\bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij})$ Formel in DNF unerfüllbar gdw. für alle i, $(\bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij})$ enthält zwei komplementäre Literale.