

# Logik für Informatiker

## 2. Aussagenlogik

### Teil 5

10.05.2016

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: [sofronie@uni-koblenz.de](mailto:sofronie@uni-koblenz.de)

# Bis jetzt

---

- **Syntax** (Formeln)
- **Semantik**
  - Wertebelegungen/Valuationen/Modelle
  - Auswertung von Formeln / Wahrheitstabellen
  - Gültigkeit und Erfüllbarkeit
  - Folgerung, Äquivalenz
- **Kalküle**
  - Wahrheitstafelmethode
  - Äquivalenzumformung
  - nicht sehr effizient.

## Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit  
(für Formeln und/oder Formelmengen)

# Bis jetzt

---

- **Normalformen**

  - Atome, Literale, Klauseln

  - Konjunktive und Disjunktive Normalform

  - Ableiten von DNF und KNF aus Wahrheitstabellen

  - Umformen in KNF/DNF

  - Mengenschreibweise

  - Subsumption

- **SAT-Problem** (Erfüllbarkeitsproblem)

  - SAT

    - Erfüllbarkeitsproblem für DNF Formeln

    - $k$ -SAT; 3-SAT vs. SAT

# Teilklassen des Erfüllbarkeitsproblems

---

## Definition:

$k$ -KNF Formel: KNF-Formeln, deren Klauseln höchstens  $k$  Literale haben

## Theorem

- Erfüllbarkeit für Formeln in KNF: NP-vollständig (ohne Beweis)
- Erfüllbarkeit für Formeln in 3-KNF: NP-vollständig (Beweisidee)
- Erfüllbarkeit für Formeln in 2-KNF: polynomiell entscheidbar (nächste Vorlesung)
- Erfüllbarkeit für Formeln in DNF: polynomiell entscheidbar

# Horn-Formeln

---

## Defintion:

**Horn-Formel:** Formel in KNF, in der jede Klausel **höchstens ein positives Literal** enthält

# Horn-Formeln

---

## Defintion:

**Horn-Formel:** Formel in KNF, in der jede Klausel **höchstens ein positives Literal** enthält

**Notation:** als Implikation

|  |   |                                 |
|--|---|---------------------------------|
| $\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_n \vee P$ | $P_1 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow P$     | $P_1, \dots, P_n \rightarrow P$ |
| $\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_n$        | $P_1 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow \perp$ | $P_1, \dots, P_n \rightarrow$   |
| $P$  | $\top \rightarrow P$                            | $\rightarrow P$                 |

# Horn-Formeln

---

## Defintion:

**Horn-Formel:** Formel in KNF, in der jede Klausel **höchstens ein positives Literal** enthält

**Notation:** als Implikation

|  |   |                                 |
|--|---|---------------------------------|
| $\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_n \vee P$ | $P_1 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow P$     | $P_1, \dots, P_n \rightarrow P$ |
| $\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_n$        | $P_1 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow \perp$ | $P_1, \dots, P_n \rightarrow$   |
| $P$  | $\top \rightarrow P$                            | $\rightarrow P$                 |

$P_1 \wedge \dots \wedge P_n$  : Rumpf

$P$ : Kopf

# Horn-Formeln

---

## Defintion:

**Horn-Formel:** Formel in KNF, in der jede Klausel **höchstens ein positives Literal** enthält

**Notation:** als Implikation

|  |   |                                 |
|--|---|---------------------------------|
| $\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_n \vee P$ | $P_1 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow P$     | $P_1, \dots, P_n \rightarrow P$ |
| $\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_n$        | $P_1 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow \perp$ | $P_1, \dots, P_n \rightarrow$   |
| $P$  | $\top \rightarrow P$                            | $\rightarrow P$                 |

$P_1 \wedge \dots \wedge P_n$  : Rumpf

$P$ : Kopf

$\rightarrow P$ : Fakt



# Horn Formel: Beispiele

---

| Klausel                     | Literalismengen         | Implikationen        |
|-----------------------------|-------------------------|----------------------|
| $\neg P$                    | $\{\neg P\}$            | $P \rightarrow$      |
| $Q \vee \neg R \vee \neg S$ | $\{Q, \neg R, \neg S\}$ | $R, S \rightarrow Q$ |
| $\neg Q \vee \neg S$        | $\{\neg Q, \neg S\}$    | $Q, S \rightarrow$   |
| $R$                         | $\{R\}$                 | $\rightarrow R$      |
| $\neg Q \vee P$             | $\{\neg Q, P\}$         | $Q \rightarrow P$    |

# Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

---

## Theorem

Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

# Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

---

## Theorem

Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

**Lemma.** Sei  $F$  Hornformel die keine Fakten enthält. Dann ist  $F$  erfüllbar.

# Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

---

## Theorem

Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

**Lemma.** Sei  $F$  Hornformel die keine Fakten enthält. Dann ist  $F$  erfüllbar.

**Beweis:** Sei  $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$  mit  $\mathcal{A}(P) = 0$  für alle  $P \in \Pi$ . Dann  $\mathcal{A}(F) = 1$ .

# Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

---

## Theorem

Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Beweis: (Idee)

Ziel:  $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$  mit  $\mathcal{A}(F) = 1$ .

Falls keine Fakten in  $F$ :  $F$  erfüllbar.

Sonst: Für alle Fakten  $\rightarrow P$  in  $F$ :  $\mathcal{A}(P) := 1$ ;

Wiederhole das Verfahren für  $F'$ , entstanden aus  $F$  durch Ersetzung von  $P$  mit  $\top$ .

# Erfüllbarkeitstest für Horn-Formeln

---

**Eingabe:**  $F = D_1 \wedge \dots \wedge D_n$  eine Hornformel

(die Klausel  $D_i$  enthält höchstens ein positives Literal,  $i = 1, 2, \dots, n$ )

# Erfüllbarkeitstest für Horn-Formeln

---

**Eingabe:**  $F = D_1 \wedge \dots \wedge D_n$  eine Hornformel

(die Klausel  $D_i$  enthält höchstens ein positives Literal)

Ein Atom in  $F$  zu markieren, bedeutet, es an allen Stellen seines Auftretens in  $F$  zu markieren

# Erfüllbarkeitstest für Horn-Formeln

---

0: IF keine Fakten (Klausel " $\rightarrow A$ ") vorhanden  
    THEN Ausgabe: erfüllbar  
    ELSE markiere alle Fakten in  $F$  (Atome  $A$  mit  $\rightarrow A$  in  $F$ )

1: IF keine Klausel  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B$  in  $F$ , so dass  
    alle Atome in  $A_1, \dots, A_n$  markiert aber  $B$  nicht  
    THEN Ausgabe: erfüllbar  
    ELSE wähle die erste solche Klausel

IF  $B$  leer  
    THEN Ausgabe: unerfüllbar  
    ELSE markiere überall  $B$  in  $F$

GOTO 1



# Beispiel 1

---

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

# Beispiel 1

---

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge \\ (\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Konjunktion von Implikationen:

|  |                         |
|--|-------------------------|
| $(P \rightarrow \perp) \wedge$                 | $P \rightarrow$         |
| $(\top \rightarrow Q) \wedge$                  | $\rightarrow Q$         |
| $(P \rightarrow R) \wedge$                     | $P \rightarrow R$       |
| $(Q \rightarrow S) \wedge$                     | $Q \rightarrow S$       |
| $(W \rightarrow T) \wedge$                     | $W \rightarrow T$       |
| $(S \rightarrow U) \wedge$                     | $S \rightarrow U$       |
| $((U \wedge T \wedge Z) \rightarrow P) \wedge$ | $U, T, Z \rightarrow P$ |
| $((Q \wedge S \wedge U) \rightarrow W)$        | $Q, S, U \rightarrow W$ |

# Beispiel 1

---

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

$$P \rightarrow$$
$$\rightarrow \underline{Q}$$
$$P \rightarrow R$$
$$\underline{Q} \rightarrow S$$
$$W \rightarrow T$$
$$S \rightarrow U$$
$$U, T, Z \rightarrow P$$
$$\underline{Q}, S, U \rightarrow W$$

{Q} initialer Fakt wegen  $\rightarrow Q$

# Beispiel 1

---

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

$$P \rightarrow$$
$$\rightarrow \underline{Q}$$
$$P \rightarrow R$$
$$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$$
$$W \rightarrow T$$
$$\underline{S} \rightarrow U$$
$$U, T, Z \rightarrow P$$
$$\underline{Q}, \underline{S}, U \rightarrow W$$

$\{Q\}$  initialer Fakt wegen  $\rightarrow Q$   
 $\{Q, S\}$  wegen  $Q \rightarrow S$

# Beispiel 1

---

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

$$P \rightarrow$$
$$\rightarrow \underline{Q}$$
$$P \rightarrow R$$
$$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$$
$$W \rightarrow T$$
$$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$$
$$\underline{U}, T, Z \rightarrow P$$
$$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow W$$

$\{Q\}$  initialer Fakt wegen  $\top \rightarrow Q$

$\{Q, S\}$  wegen  $Q \rightarrow S$

$\{Q, S, U\}$  wegen  $S \rightarrow U$

# Beispiel 1

---

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge \\ (\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

|   |   |
|---|---|
| $P \rightarrow$   | $\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$ |
| $\rightarrow \underline{Q}$   | $\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$                |
| $P \rightarrow R$   | $\{Q, S, U\}$ wegen $S \rightarrow U$             |
| $\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$                               | $\{Q, S, U, W\}$ wegen $Q, S, U \rightarrow W$    |
| $\underline{W} \rightarrow T$   |   |
| $\underline{S} \rightarrow \underline{U}$                               |   |
| $\underline{U}, T, Z \rightarrow P$                                     |   |
| $\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \underline{W}$ |   |

# Beispiel 1

---

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

|   |   |
|---|---|
| $P \rightarrow$   | $\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$ |
| $\rightarrow \underline{Q}$   | $\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$                |
| $P \rightarrow R$   | $\{Q, S, U\}$ wegen $S \rightarrow U$             |
| $\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$                               | $\{Q, S, U, W\}$ wegen $Q, S, U \rightarrow W$    |
| $\underline{W} \rightarrow \underline{T}$                               | $\{Q, S, U, W, T\}$ wegen $W \rightarrow T$       |
| $\underline{S} \rightarrow \underline{U}$                               |   |
| $\underline{U}, \underline{T}, Z \rightarrow P$                         |   |
| $\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \underline{W}$ |   |

# Beispiel 1

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge \\ (\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W) \quad \text{Erfüllbar}$$

Markierte Atome und Erklärung:

|   |   |
|---|---|
| $P \rightarrow$   | $\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$   |
| $\rightarrow \underline{Q}$   | $\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$                  |
| $P \rightarrow R$   | $\{Q, S, U\}$ wegen $S \rightarrow U$               |
| $\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$                               | $\{Q, S, U, W\}$ wegen $Q, S, U \rightarrow W$      |
| $\underline{W} \rightarrow \underline{T}$                               | $\{Q, S, U, W, T\}$ wegen $W \rightarrow T$         |
| $\underline{S} \rightarrow \underline{U}$                               | Keine weiteren Schritte möglich, da es              |
| $\underline{U}, \underline{T}, Z \rightarrow P$                         | keine Implikation gibt, deren linke Seite           |
| $\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \underline{W}$ | vollständig markiert ist und die rechte Seite nicht |

**Modell:**  $\mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(U) = \mathcal{A}(W) = \mathcal{A}(T) = 1, \mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(Z) = 0$

Markierte Atome: wahr; nicht markierte Atome: falsch.



## Beispiel 2

---

$$(\neg P) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge \\ (\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Erfüllbar

Markierte Atome und Erklärung:

$$P \rightarrow$$

$$P \rightarrow R$$

$$Q \rightarrow S$$

$$W \rightarrow T$$

$$S \rightarrow U$$

$$U, T, Z \rightarrow P$$

$$Q, S, U \rightarrow W$$

Keine Schritte möglich, da es keine Implikation gibt, deren linke Seite vollständig markiert ist und die rechte Seite nicht

Modell:  $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(T) = \mathcal{A}(U) = \mathcal{A}(W) = \mathcal{A}(Z) = 0$

## Beispiel 3

---

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge \\ (\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U)$$

$$\begin{array}{l} P \rightarrow \\ \rightarrow \underline{Q} \\ P \rightarrow R \\ \underline{Q} \rightarrow \underline{S} \\ W \rightarrow T \\ \underline{S} \rightarrow \underline{U} \\ \underline{U}, T, Z \rightarrow P \\ \underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \end{array}$$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$  initialer Fakt wegen  $\top \rightarrow Q$

$\{Q, S\}$  wegen  $Q \rightarrow S$

$\{Q, S, U\}$  wegen  $S \rightarrow U$

Unerfüllbar

$Q, S, U$  markiert, aber Kopf von

$Q, S, U \rightarrow$  leer

# Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

---

## Theorem

Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Beweis: (Idee)

Ziel:  $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$  mit  $\mathcal{A}(F) = 1$ .

Falls keine Fakten in  $F$ :  $F$  erfüllbar.

Sonst: Für alle Fakten  $\rightarrow P$  in  $F$ :  $\mathcal{A}(P) := 1$ ;

Wiederhole das Verfahren für  $F'$ , entstanden aus  $F$  durch Ersetzung von  $P$  mit  $\top$ .

Komplexität:  $|F| \times |F|$

# Unser Ziel

---

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit  
(für Formeln und/oder Formelmengen)

# Unser Ziel

---

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit  
(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

Resolution

# Unser Ziel

---

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit  
(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

Resolution

2. Formelmengen

Semantische Tableaux

# Unser Ziel

---

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit  
(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

Resolution

2. Formelmengen

Semantische Tableaux

# Motivation

---

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$

$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

Implikationen

$$P \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{Q}$$

$$P \rightarrow R$$

$$\underline{Q} \rightarrow S$$

$$W \rightarrow T$$

$$S \rightarrow U$$

$$U, T, Z \rightarrow P$$

$$\underline{Q}, S, U \rightarrow W$$

Klauseln

$$\neg P$$

$$Q$$

$$\neg P \vee R$$

$$\neg Q \vee S$$

$$\neg W \vee T$$

$$\neg S \vee U$$

$$\neg U \vee \neg T \vee \neg Z \vee P$$

$$\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W$$

{Q}

initialer Fakt wegen  $\rightarrow Q$

$Q \mapsto T$



# Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$

$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

Implikationen

$$P \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{Q}$$

$$P \rightarrow R$$

$$\underline{Q} \rightarrow S$$

$$W \rightarrow T$$

$$S \rightarrow U$$

$$U, T, Z \rightarrow P$$

$$\underline{Q}, S, U \rightarrow W$$

Klauseln

$$\neg P$$

$$Q$$

$$\neg P \vee R$$

$$S$$

$$\neg W \vee T$$

$$\neg S \vee U$$

$$\neg U \vee \neg T \vee \neg Z \vee P$$

$$\neg S \vee \neg U \vee W$$

{Q} initialer Fakt wegen  $\rightarrow Q$

$Q \mapsto T$

# Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$

$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

Implikationen

$$P \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{Q}$$

$$P \rightarrow R$$

$$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$$

$$W \rightarrow T$$

$$\underline{S} \rightarrow U$$

$$U, T, Z \rightarrow P$$

$$\underline{Q}, \underline{S}, U \rightarrow W$$

Klauseln

$$\neg P$$

$$Q$$

$$\neg P \vee R$$

$$S$$

$$\neg W \vee T$$

$$\neg S \vee U$$

$$\neg U \vee \neg T \vee \neg Z \vee P$$

$$\neg S \vee \neg U \vee W$$

{Q} initialer Fakt wegen  $\rightarrow Q$

{Q, S} wegen  $Q \rightarrow S$

$$Q \mapsto T$$

$$S \mapsto T$$

# Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$

$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

Implikationen

$$P \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{Q}$$

$$P \rightarrow R$$

$$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$$

$$W \rightarrow T$$

$$\underline{S} \rightarrow U$$

$$U, T, Z \rightarrow P$$

$$\underline{Q}, \underline{S}, U \rightarrow W$$

Klauseln

$$\neg P$$

$$Q$$

$$\neg P \vee R$$

$$S$$

$$\neg W \vee T$$

$$U$$

$$\neg U \vee \neg T \vee \neg Z \vee P$$

$$\neg U \vee W$$

{Q} initialer Fakt wegen  $\rightarrow Q$

{Q, S} wegen  $Q \rightarrow S$

$Q \mapsto T$

$S \mapsto T$

# Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$

$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

Implikationen

$$P \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{Q}$$

$$P \rightarrow R$$

$$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$$

$$W \rightarrow T$$

$$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$$

$$\underline{U}, T, Z \rightarrow P$$

$$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow W$$

Klauseln

$$\neg P$$

$$Q$$

$$\neg P \vee R$$

$$S$$

$$\neg W \vee T$$

$$U$$

$$\neg U \vee \neg T \vee \neg Z \vee P$$

$$\neg U \vee W$$

{Q} initialer Fakt wegen  $\top \rightarrow Q$

{Q, S} wegen  $Q \rightarrow S$

{Q, S, U} wegen  $S \rightarrow U$

$Q \mapsto T$

$S \mapsto T$

$U \mapsto T$

# Motivation

---

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$

$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

## Implikationen

$$P \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{Q}$$

$$P \rightarrow R$$

$$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$$

$$W \rightarrow T$$

$$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$$

$$\underline{U}, T, Z \rightarrow P$$

$$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow W$$

## Klauseln

$$\neg P$$

$$Q$$

$$\neg P \vee R$$

$$S$$

$$\neg W \vee T$$

$$U$$

$$\neg T \vee \neg Z \vee P$$

$$W$$

## Markierte Atome und Erklärung:

{Q} initialer Fakt wegen  $\top \rightarrow Q$

{Q, S} wegen  $Q \rightarrow S$

{Q, S, U} wegen  $S \rightarrow U$

$Q \mapsto T$

$S \mapsto T$

$U \mapsto T$

# Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$

$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

Implikationen

Klauseln

$P \rightarrow$   
 $\rightarrow \underline{Q}$   
 $P \rightarrow R$   
 $\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$   
 $\underline{W} \rightarrow T$   
 $\underline{S} \rightarrow \underline{U}$   
 $\underline{U}, T, Z \rightarrow P$   
 $\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \underline{W}$

$\neg P$   
 $Q$   
 $\neg P \vee R$   
 $S$   
 $T$   
 $U$   
 $\neg T \vee \neg Z \vee P$   
 $W$

$\{Q\}$  initialer Fakt wegen  $\top \rightarrow Q$   $Q \mapsto T$   
 $\{Q, S\}$  wegen  $Q \rightarrow S$   $S \mapsto T$   
 $\{Q, S, U\}$  wegen  $S \rightarrow U$   $U \mapsto T$   
 $\{Q, S, U, W\}$  wegen  $Q, S, U \rightarrow W$   $W \mapsto T$

# Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$

$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Markierte Atome und Erklärung:

Implikationen

Klauseln

$$P \rightarrow$$

$$\neg P$$

$$\rightarrow \underline{Q}$$

$$Q$$

$$P \rightarrow R$$

$$\neg P \vee R$$

$$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$$

$$S$$

$$\underline{W} \rightarrow \underline{T}$$

$$T$$

$$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$$

$$U$$

$$\underline{U}, \underline{T}, Z \rightarrow P$$

$$\neg Z \vee P$$

$$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \underline{W}$$

$$W$$

$\{Q\}$  initialer Fakt wegen  $\top \rightarrow Q$   $Q \mapsto T$

$\{Q, S\}$  wegen  $Q \rightarrow S$   $S \mapsto T$

$\{Q, S, U\}$  wegen  $S \rightarrow U$   $U \mapsto T$

$\{Q, S, U, W\}$  wegen  $Q, S, U \rightarrow W$   $W \mapsto T$

$\{Q, S, U, W, T\}$  wegen  $W \rightarrow T$   $T \mapsto T$

# Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$

$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

## Implikationen

$$P \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{Q}$$

$$P \rightarrow R$$

$$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$$

$$\underline{W} \rightarrow \underline{T}$$

$$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$$

$$\underline{U}, \underline{T}, Z \rightarrow P$$

$$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \underline{W}$$

## Klauseln

$$\neg P$$

$$Q$$

$$\neg P \vee R$$

$$S$$

$$T$$

$$U$$

$$\neg Z \vee P$$

$$W$$

## Markierte Atome und Erklärung:

{Q} initialer Fakt wegen  $T \rightarrow Q$   $Q \mapsto T$

{Q, S} wegen  $Q \rightarrow S$   $S \mapsto T$

{Q, S, U} wegen  $S \rightarrow U$   $U \mapsto T$

{Q, S, U, W} wegen  $Q, S, U \rightarrow W$   $W \mapsto T$

{Q, S, U, W, T} wegen  $W \rightarrow T$   $T \mapsto T$

## Modell:

$$\mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(U) = \mathcal{A}(W) = \mathcal{A}(T) = 1$$

$$\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(Z) = 0$$

Markierte Atome: wahr; nicht markierte Atome: falsch.



# Bemerkung

---

**Horn Klauseln:**

$$\frac{P \quad P, P_1 \dots P_n \rightarrow Q}{P_1 \dots P_n \rightarrow Q}$$

Klauselschreibweise:

$$\frac{P \quad \neg P \vee \neg P_1 \dots \neg P_n \vee Q}{\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_n \vee Q}$$

Mengenschreibweise:

$$\frac{\{P\} \quad \{\neg P, \neg P_1, \neg P_n, Q\}}{\{\neg P_1, \dots, \neg P_n, Q\}}$$

# Verallgemeinerung?

---

Syllogismus (in der ersten Vorlesung erwähnt):

$$\frac{P \quad P \rightarrow C}{C}$$

Mengenschreibweise: 1-Resolution (unit resolution)

$$\frac{\{P\} \quad \{\neg P\} \cup C}{C} \qquad \frac{\{\neg P\} \quad \{P\} \cup C}{C}$$

# Verallgemeinerung?

---

Nicht geeignet für Erfüllbarkeitsüberprüfung beliebiger Klauselmengen:

Die Klauselmenge

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

ist nicht erfüllbar, aber mit 1-Resolution ist aus  $M$  nichts ableitbar, also auch nicht  $\perp$ .

# Verallgemeinerung?

---

Nicht geeignet für Erfüllbarkeitsüberprüfung beliebiger Klauselmengen:

Die Klauselmenge

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

ist nicht erfüllbar, aber mit 1-Resolution ist aus  $M$  nichts ableitbar, also auch nicht  $\perp$ .

**Ziel:** Kalkül mit der Eigenschaft dass:

- (1) falls  $M$  unerfüllbar  $\perp$  ist aus  $M$  ableitbar
- (2) falls  $\perp$  aus  $M$  ableitbar,  $M$  unerfüllbar.

⇒ Der Resolutionkalkül

# Der aussagenlogische Resolutionkalkül

---

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit

# Der aussagenlogische Resolutionkalkül

---

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Voraussetzung: Alle Formeln in konjunktiver Normalform

# Der aussagenlogische Resolutionkalkül

---

## Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Voraussetzung: Alle Formeln in konjunktiver Normalform
- Eine einzige Regel

# Der aussagenlogische Resolutionkalkül

---

## Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Voraussetzung: Alle Formeln in konjunktiver Normalform
- Eine einzige Regel
- Operiert auf Klauseln (in Mengenschreibweise)



# Resolutionskalkül

---

**Definition:** **Resolutionsregel** (einzige Regel des Kalküls)

$$\frac{C_1 \cup \{P\} \quad \{\neg P\} \cup C_2}{C_1 \cup C_2}$$

wobei

- $P$  eine aussagenlogische Variable
- $C_1, C_2$  Klauseln (können leer sein)

**Definition:**

$C_1 \cup C_2$  heißt **Resolvente** von  $C_1 \cup \{P\}, C_2 \cup \{\neg P\}$

# Resolution: Beispiel

---

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

# Resolution: Beispiel

---

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\underline{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}$$

# Resolution: Beispiel

---

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

# Resolution: Beispiel

---

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$
$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

# Resolution: Beispiel

---

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$
$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

# Resolution: Beispiel

---

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$
$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$
$$\frac{\{P_1\} \quad \{\neg P_1\}}{\perp}$$

# Resolution: Beispiel

---

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$
$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$
$$\frac{\{P_1\} \quad \{\neg P_1\}}{\perp}$$

**Insgesamt:**  $M \vdash_{\text{Res}} \perp$

also:  $M$  unerfüllbar



# Resolution: Weiteres Beispiel

---

Zu zeigen:

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

ist allgemeingültig

# Resolution: Weiteres Beispiel

---

Zu zeigen:

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

ist allgemeingültig

Dazu zeigen wir, dass

$$\neg[(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))]$$

unerfüllbar ist.

# Resolution: Weiteres Beispiel

---

Zu zeigen:

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

ist allgemeingültig

Dazu zeigen wir, dass

$$\neg[(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))]$$

unerfüllbar ist.

**Klauselnormalform:**

$$\{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

# Resolution: Weiteres Beispiel

---

## Klauselnormform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

## Ableitung der leeren Klausel aus $M$ :

- (1)  $\{\neg P, Q\}$  gegeben
- (2)  $\{\neg Q, R\}$  gegeben
- (3)  $\{P\}$  gegeben
- (4)  $\{\neg R\}$  gegeben

# Resolution: Weiteres Beispiel

---

## Klauselnormalfom:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

## Ableitung der leeren Klausel aus $M$ :

- (1)  $\{\neg P, Q\}$  gegeben
- (2)  $\{\neg Q, R\}$  gegeben
- (3)  $\{P\}$  gegeben
- (4)  $\{\neg R\}$  gegeben
- (5)  $\{Q\}$  aus (1) und (3)

# Resolution: Weiteres Beispiel

---

## Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

## Ableitung der leeren Klausel aus $M$ :

- (1)  $\{\neg P, Q\}$  gegeben
- (2)  $\{\neg Q, R\}$  gegeben
- (3)  $\{P\}$  gegeben
- (4)  $\{\neg R\}$  gegeben
- (5)  $\{Q\}$  aus (1) und (3)
- (6)  $\{R\}$  aus (2) und (5)

# Resolution: Weiteres Beispiel

---

## Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

## Ableitung der leeren Klausel aus $M$ :

- (1)  $\{\neg P, Q\}$  gegeben
- (2)  $\{\neg Q, R\}$  gegeben
- (3)  $\{P\}$  gegeben
- (4)  $\{\neg R\}$  gegeben
- (5)  $\{Q\}$  aus (1) und (3)
- (6)  $\{R\}$  aus (2) und (5)
- (7)  $\perp$  aus (4) und (6)

# Resolution: Bemerkungen

---

Vorsicht bei Klauseln mit mehreren Resolutionsmöglichkeiten

- Zwei Klauseln können mehr als eine Resolvente haben  
z.B.:  $\{A, B\}$  und  $\{\neg A, \neg B\}$
- $\{A, B, C\}$  und  $\{\neg A, \neg B, D\}$  haben **NICHT**  $\{C, D\}$  als Resolvente



# Resolution: Bemerkungen

---

Vorsicht bei Klauseln mit mehreren Resolutionsmöglichkeiten

- Zwei Klauseln können mehr als eine Resolvente haben  
z.B.:  $\{A, B\}$  und  $\{\neg A, \neg B\}$
- $\{A, B, C\}$  und  $\{\neg A, \neg B, D\}$  haben **NICHT**  $\{C, D\}$  als Resolvente

**Heuristik:** Immer möglichst kleine Klauseln ableiten

# Zusammenfassung

---

- SAT-Probleme (SAT, 3-SAT, 2-SAT, DNF-SAT)
- Horn-Formeln
- Erfüllbarkeitstest für Hornformeln
- 1-Resolution (unvollständig)
- Der aussagenlogische Resolutionskalkül