Logik für Informatiker

2. Aussagenlogik

Teil 7

24.05.2016

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit

(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

   Resolution — bis jetzt

2. Formelmengen

   Semantische Tableaux

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit

(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

   Resolution

2. Formelmengen

   Semantische Tableaux

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Beweis durch Fallunterscheidung
- Top-down-Analyse der gegebenen Formeln

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Vorteile

- Intuitiver als Resolution
- Formeln müssen nicht in Normalform sein
- Falls Formelmenge erfüllbar ist (Test schlägt fehl), wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Vorteile

- Intuitiver als Resolution
- Formeln müssen nicht in Normalform sein
- Falls Formelmenge erfüllbar ist (Test schlägt fehl), wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

Nachteile

- Mehr als eine Regel

Formeltypen

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg F$
- $F \land G$
- $\neg(F \lor G)$
- $\neg(F \to G)$

Formeltypen

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg F$
- $F \wedge G$
- $\neg(F \vee G)$
- $\neg(F \rightarrow G)$

Disjunktive Formeln: Typ β

- $\neg(F \wedge G)$
- $F \vee G$
- $F \rightarrow G$

Formeltypen

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg F$
- $F \wedge G$
- $\neg(F \vee G)$
- $\neg(F \rightarrow G)$

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

α	α_1	α_2
$F \wedge G$	F	G
$\neg(F \vee G)$	$\neg F$	$\neg G$
$\neg(F \rightarrow G)$	F	$\neg G$
$\neg\neg F$	F	

Formeltypen

Disjunktive Formeln: Typ β

- $\neg(F \wedge G)$
- $F \vee G$
- $F \rightarrow G$

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

β	β_1	β_2
$\neg(F \wedge G)$	$\neg F$	$\neg G$
$F \vee G$	F	G
$F \rightarrow G$	$\neg F$	G

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{array}}$$

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{array}}$$

Konjunktiv

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ | \\ p \\ | \\ q \end{array}$$

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls

$$\begin{array}{l} \alpha \\ \hline \alpha_1 \\ \\ \alpha_2 \end{array}$$

Konjunktiv

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ | \\ p \\ | \\ q \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \beta \\ \hline \beta_1 \mid \beta_2 \end{array}$$

Disjunktiv

$$\begin{array}{ccc} & p \vee q & \\ / & & \backslash \\ p & & q \end{array}$$

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1 \\ \\ \alpha_2\end{array}}$$

Konjunktiv

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ | \\ p \\ | \\ q \end{array}$$

$$\frac{\beta}{\beta_1 \quad | \quad \beta_2}$$

Disjunktiv

$$\begin{array}{ccc} & p \vee q & \\ / & & \backslash \\ p & & q \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\phi \\ \neg\phi\end{array}}{\bot}$$

Widerspruch

$$\begin{array}{c} \phi \\ \neg\phi \\ | \\ \bot \end{array}$$

Instanzen der α und β-Regel

Instanzen der α-Regel

$$\frac{P \wedge Q}{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}} \qquad \frac{\neg(P \vee Q)}{\begin{array}{c} \neg P \\ \neg Q \end{array}} \qquad \frac{\neg(P \to Q)}{\begin{array}{c} P \\ \neg Q \end{array}} \qquad \frac{\neg\neg P}{P}$$

Instanzen der α und β-Regel

Instanzen der α-Regel

$$\frac{P \land Q}{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}} \qquad \frac{\neg(P \lor Q)}{\begin{array}{c} \neg P \\ \neg Q \end{array}} \qquad \frac{\neg(P \to Q)}{\begin{array}{c} P \\ \neg Q \end{array}} \qquad \frac{\neg\neg P}{P}$$

Instanzen der β-Regel

$$\frac{P \lor Q}{P \mid Q} \qquad \frac{\neg(P \land Q)}{\neg P \mid \neg Q} \qquad \frac{P \to Q}{\neg P \mid Q}$$

Ein Tableau für $\{P \wedge \neg(Q \vee \neg R),\ \neg Q \vee \neg R\}$

1.(1) $P \wedge \neg(Q \vee \neg R)$

(2) $\neg Q \vee \neg R$

(3)	$\neg Q$	(4)	$\neg R$
(5)	P	(10)	P
(6)	$\neg(Q \vee \neg R)$	(11)	$\neg(Q \vee \neg R)$
(7)	$\neg Q$		
(8)	$\neg\neg R$		
(9)	R		

Dieses Tableau ist nicht "maximal", aber der erste "Ast" ist.
Dieser Ast ist nicht "geschlossen" (enthält keinen Widerspruch), also ist die Formelmenge $\{(1),(2)\}$ erfüllbar.
(Diese Begriffe werden auf den nächsten Seiten erklärt.)

Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch

Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch
- Der Kalkül aber nicht:
  Auswahl der nächsten Formel, auf die eine Regel angewendet wird

Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch
- Der Kalkül aber nicht:
  Auswahl der nächsten Formel, auf die eine Regel angewendet wird

Heuristik

- Nicht-verzweigende Regeln zuerst: α vor β

Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch
- Der Kalkül aber nicht:
  Auswahl der nächsten Formel, auf die eine Regel angewendet wird

Heuristik

- Nicht-verzweigende Regeln zuerst: α vor β

Nota bene:

Dieselbe Formel kann mehrfach (auf verschiedenen Ästen) verwendet werden

Beispiel

Zu zeigen:

$$(P \to (Q \to R)) \to ((P \vee S) \to ((Q \to R) \vee S)) \text{ allgemeingültig}$$

Beispiel

Zu zeigen:

$$(P \to (Q \to R)) \to ((P \lor S) \to ((Q \to R) \lor S)) \text{ allgemeingültig}$$

Wir zeigen, dass

$$\neg[(P \to (Q \to R)) \to ((P \lor S) \to ((Q \to R) \lor S))]$$

unerfüllbar ist.

Beispiel

(1) $\neg[(P \to (Q \to R)) \to ((P \vee S) \to ((Q \to R) \vee S))]$

(2) $(P \to (Q \to R))$ $\quad \alpha\ [1_1]$

(3) $\neg((P \vee S) \to ((Q \to R) \vee S))$ $\quad \alpha\ [1_2]$

(4) $P \vee S$ $\quad \alpha\ [3_1]$

(5) $\neg((Q \to R) \vee S))$ $\quad \alpha\ [3_2]$

(6) $\neg(Q \to R)$ $\quad \alpha\ [5_1]$

(7) $\neg S$ $\quad \alpha\ [5_2]$

(8) $\neg P$ $\quad \beta\ [2_1]$ $\qquad$ (9) $Q \to R$ $\quad \beta\ [2_2]$

(10) P $\quad \beta\ [4_1]$ $\qquad$ (11) S $\quad \beta\ [4_2]$

geschlossenes Tableau.

Formale Definition des Kalküls

Definition

Tableau: Binärer Baum, dessen Knoten mit Formeln markiert sind

Formale Definition des Kalküls

Definition

Tableau: Binärer Baum, dessen Knoten mit Formeln markiert sind

Definition

Tableauast: Maximaler Pfad in einem Tableau (von Wurzel zu Blatt)

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- T ein Tableau für M
- B ein Ast von T
- F eine Formel auf B oder in M, die kein Literal ist

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- T ein Tableau für M
- B ein Ast von T
- F eine Formel auf B oder in M, die kein Literal ist

T' entstehe durch Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel (α oder β)

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- T ein Tableau für M
- B ein Ast von T
- F eine Formel auf B oder in M, die kein Literal ist

T' entstehe durch Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel (α oder β)

Dann ist T' ein Tableau für M.

Formale Definition des Kalküls

Nota bene:

Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M

Formale Definition des Kalküls

Nota bene:

Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M

Definition.

Ast B eines Tableaus für M ist geschlossen, wenn es eine Formel F existiert, so dass B die Formeln F und $\neg F$ enthält.

Formale Definition des Kalküls

Nota bene:

Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M

Definition.

Ast B eines Tableaus für M ist geschlossen, wenn es eine Formel F existiert, so dass B die Formeln F und $\neg F$ enthält.

Definition.

Ein Tableau ist geschlossen, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist.

Formale Definition des Kalküls

Nota bene:

Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M

Definition.

Ast B eines Tableaus für M ist geschlossen, wenn es eine Formel F existiert, so dass B die Formeln F und $\neg F$ enthält.

Definition.

Ein Tableau ist geschlossen, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist.

Definition.

Ein Tableau für M, das geschlossen ist, ist ein Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M

Beispiel

Zu zeigen:

$$(P \to (Q \to R)) \to ((P \vee S) \to ((Q \to R) \vee S)) \text{ allgemeingültig}$$

Beispiel

Zu zeigen:

$$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee S) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \vee S)) \text{ allgemeingültig}$$

Wir zeigen, dass

$$\neg[(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee S) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \vee S))]$$

unerfüllbar ist.

Beispiel

(1) $\neg[(P \to (Q \to R)) \to ((P \vee S) \to ((Q \to R) \vee S))]$

(2) $(P \to (Q \to R))$ $\alpha\ [1_1]$

(3) $\neg((P \vee S) \to ((Q \to R) \vee S))$ $\alpha\ [1_2]$

(4) $P \vee S$ $\alpha\ [3_1]$

(5) $\neg((Q \to R) \vee S))$ $\alpha\ [3_2]$

(6) $\neg(Q \to R)$ $\alpha\ [5_1]$

(7) $\neg S$ $\alpha\ [5_2]$

(8) $\neg P$ $\beta\ [2_1]$ (9) $Q \to R$ $\beta\ [2_2]$

(10) P $\beta\ [4_1]$ (11) S $\beta\ [4_2]$

geschlossenes Tableau.

Klauseltableau

M Menge von Klauseln

Klauseltableau

M Menge von Klauseln

Änderungen

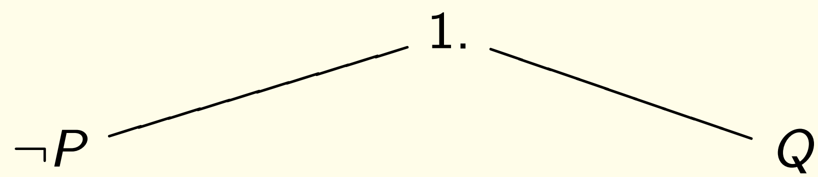
- Keine α-Regel
- Erweiterungsregel kann Verzweigungsgrad > 2 haben
- Alle Knoten im Tableau enthalten Literale

Klauseltableau: Beispiel

$M = \{\ \{P, Q, R\}, \{\neg R\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg Q\}\ \}$

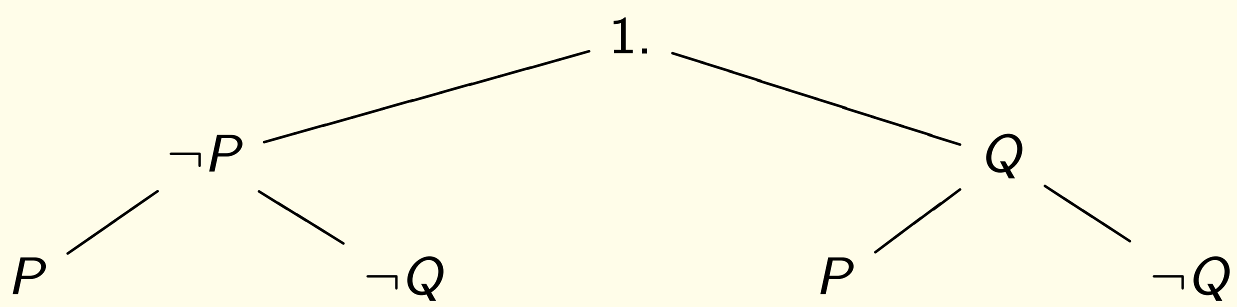
Klauseltableau: Beispiel

$M = \{\ \{P, Q, R\}, \{\neg R\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg Q\}\ \}$



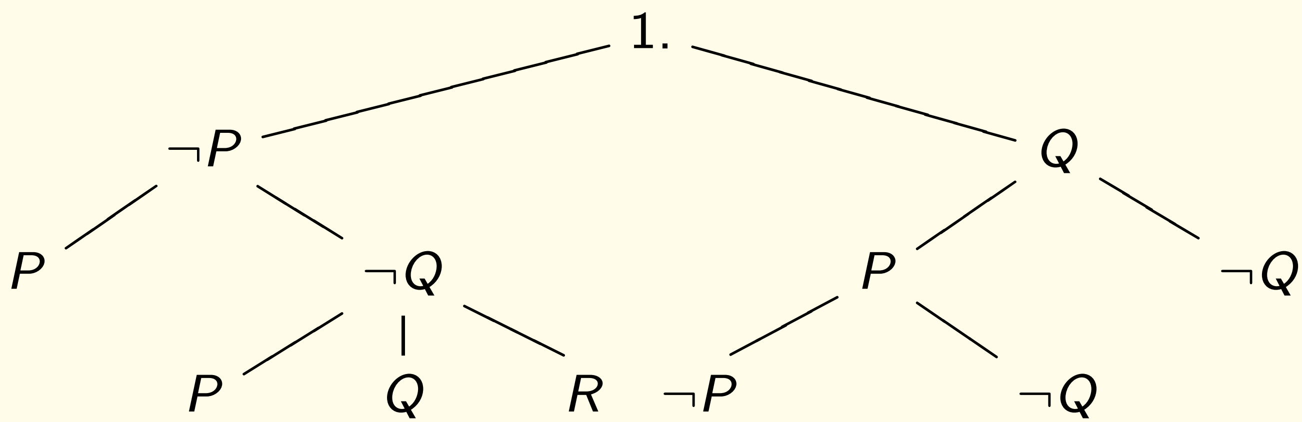
Klauseltableau: Beispiel

$M = \{\ \{P, Q, R\}, \{\neg R\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg Q\}\ \}$



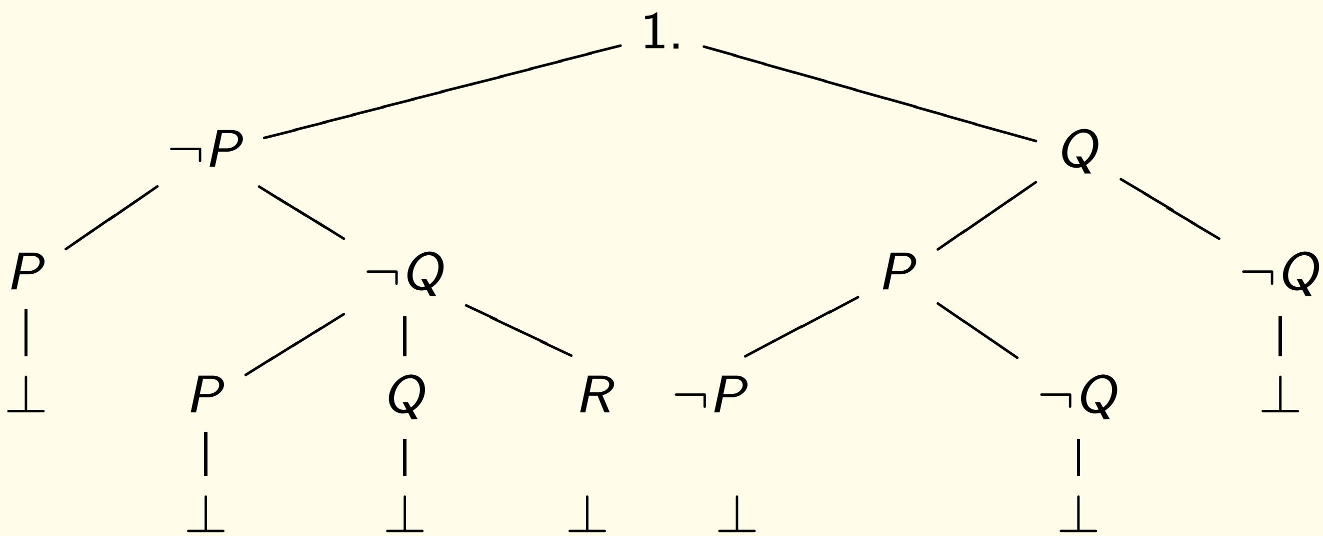
Klauseltableau: Beispiel

$M = \{ \ \{P, Q, R\}, \{\neg R\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg Q\} \ \}$



Klauseltableau: Beispiel

$M = \{\ \{P, Q, R\}, \{\neg R\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg Q\}\ \}$



Korrektheit und Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem.

Eine Formelmenge M ist unerfüllbar

genau dann, wenn

es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt

Korrektheit und Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem.

Eine Formelmenge M ist unerfüllbar
genau dann, wenn
es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt

Korrektheit: "$\Leftarrow$"

Falls es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt
(d.h. ein Tableau für M, das geschlossen ist)
so ist M unerfüllbar.

... alternativ:

Falls M erfüllbar ist, hat M kein geschlossenes Tableau.

Korrektheit und Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem.

Eine Formelmenge M ist unerfüllbar
genau dann, wenn
es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt

Vollständigkeit: "$\Rightarrow$"

Falls M unerfüllbar ist,
gibt es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M
(d.h. ein Tableau für M, das geschlossen ist).

Kern des Korrektheitsbeweises

Theorem (Korrektheit)
Falls es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt
(d.h. ein Tableau für M, das geschlossen ist) so ist M unerfüllbar.

... alternativ: Falls M erfüllbar ist, hat M kein geschlossenes Tableau.

Kern des Korrektheitsbeweises

Theorem (Korrektheit)
Falls es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt (d.h. ein Tableau für M, das geschlossen ist) so ist M unerfüllbar.

... alternativ: Falls M erfüllbar ist, hat M kein geschlossenes Tableau.

Definition.

Ein Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Ein Tableau ist erfllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Kern des Korrektheitsbeweises

Theorem (Korrektheit)
Falls es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt (d.h. ein Tableau für M, das geschlossen ist) so ist M unerfüllbar.

... alternativ: Falls M erfüllbar ist, hat M kein geschlossenes Tableau.

Definition.

Ein Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Ein Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma 1. Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

Lemma 2. Ein geschlossenes Tableau ist nicht erfüllbar

... Also: Kein geschlossenes Tableau für erfüllbare Formelmenge

Lemma 1: Beweis

Definition.

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist.

Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma 1. Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

Lemma 1: Beweis

Definition.

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist.

Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma 1. Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

Beweis: Induktion $p(n)$: Falls M erfüllbar und das Tableau T in n Schritten aus M gebildet wurde, ist T erfüllbar

Lemma 1: Beweis

Definition.

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist.

Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma 1. Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

Beweis: Induktion $p(n)$: Falls M erfüllbar und das Tableau T in n Schritten aus M gebildet wurde, ist T erfüllbar

Induktionsbasis: T wurde in einem Schritt gebildet.

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

da M erfüllbar ist, ist ein solches Tableau erfüllbar

Lemma 1: Beweis

Definition. Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist.
Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma 1. Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

Beweis: Induktion $\quad p(n)$: Falls M erfüllbar und das Tableau T in n Schritten aus M gebildet wurde, ist T erfüllbar

Induktionsschritt: Annahme $p(n)$ gilt. Zu zeigen: $p(n+1)$.

Sei T ein in $n+1$ Schritten gebildetes Tableau für M.
Dann gibt es ein Tableau T' für M (in n Schritten gebildet), ein Ast B von T' und eine Formel F auf B, die kein Literal ist, so dass T durch die Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel (α oder β) entstanden ist.

Induktionsvoraussetzung: T' erfüllbar, d.h. hat (mindestens) einen erfüllbaren Ast B'.

Fall 1: $B' \neq B$. Dann ist B' auch Ast in T, d.h. T erfüllbar.

Lemma 1: Beweis

Definition. Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist.
Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma 1. Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

Beweis: Induktion $\quad p(n)$: Falls M erfüllbar und das Tableau T in n Schritten aus M gebildet wurde, ist T erfüllbar

Induktionsschritt: Annahme $p(n)$ gilt. Zu zeigen: $p(n+1)$.

Sei T ein in $n+1$ Schritten gebildetes Tableau für M.
Dann gibt es ein Tableau T' für M (in n Schritten gebildet), ein Ast B von T' und eine Formel F auf B oder in M, die kein Literal ist, so dass T durch die Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel (α oder β) entstanden ist.

Induktionsvoraussetzung: T' erfüllbar, d.h. hat (mindestens) einen erfüllbaren Ast B'.

Fall 2: $B' = B$ d.h. B erfüllbar. Sei $\mathcal{A}$ Modell für die Formeln N_B auf B.

> Fall 2a: α-Regel angewandt $F \equiv F_1 \wedge F_2$. Dann ist $\mathcal{A}$ Modell für $N_B \cup \{F_1, F_2\}$, d.h.: die Erweiterung von B mit dieser α-Regel ist erfüllbar, so T erfüllbar.

Lemma 1: Beweis

Definition. Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist.
Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma 1. Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

Beweis: Induktion $\quad p(n)$: Falls M erfüllbar und das Tableau T in n Schritten aus M gebildet wurde, ist T erfüllbar

Induktionsschritt: Annahme $p(n)$ gilt. Zu zeigen: $p(n+1)$.

Sei T ein in $n+1$ Schritten gebildetes Tableau für M.
Dann gibt es ein Tableau T' für M (in n Schritten gebildet), ein Ast B von T' und eine Formel F auf B oder in M, die kein Literal ist, so dass T durch die Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel (α oder β) entstanden ist.

Induktionsvoraussetzung: T' erfüllbar, d.h. hat (mindestens) einen erfüllbaren Ast B'.

Fall 2: $B' = B$ d.h. B erfüllbar. Sei $\mathcal{A}$ Modell für die Formeln N_B auf B.

Fall 2b: β-Regel angewandt $F \equiv F_1 \vee F_2$. Dann $1 = \mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(F_1) \vee \mathcal{A}(F_2)$, so $\mathcal{A}(F_1) = 1$ oder $\mathcal{A}(F_2) = 1$. Dann $\mathcal{A} \models N_B \cup \{F_i\}$, $i = 1$ oder 2, d.h. $\mathcal{A}$ Modell für alle Formeln auf der Erweiterung von B mit F_1 oder F_2, so T erfüllbar.

Lemma 2: Beweis

Definition.

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma 1. Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

Lemma 2. Ein geschlossenes Tableau ist nicht erfüllbar

Beweis: Kontraposition

Annahme: T erfüllbar. Dann hat T einen erfüllbaren Ast B.

Falls die Menge der Formeln auf B (und M) erfüllbar ist, kann B nicht Formeln F und $\neg F$ enthalten, d.h. B kann nicht geschlossen sein.

Korrektheit

Theorem (Korrektheit)
Falls es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt (d.h. ein Tableau für M, das geschlossen ist) so ist M unerfüllbar.

Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem (Korrektheit)
Falls es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt (d.h. ein Tableau für M, das geschlossen ist) so ist M unerfüllbar.

Theorem (Vollständigkeit)
Falls M unerfüllbar, so gibt es einen Tableaubeweis für die Unerfüllbarkeit von M (d.h. einen Tableau für M, das geschlossen ist).

... alternativ:

"falls es keinen Tableaubeweis für die Unerfüllbarkeit von M gibt (d.h. "maximales Tableau"" für M nicht geschlossen) so ist M erfüllbar"

Kern des Vollständigkeitsbeweises

Definition.

Ein Tableau heißt voll expandiert, wenn

- jede Regel
- auf jede passende Formel
- auf jedem offenen Ast

angewendet worden ist.

Kern des Vollständigkeitsbeweises

Definition.

Ein Tableau heißt voll expandiert, wenn

- jede Regel
- auf jede passende Formel
- auf jedem offenen Ast

angewendet worden ist.

Lemma 3.
Sei B offener Ast in voll expandiertem Tableau.
Dann ist die Menge der Formeln in B erfüllbar.

... Also: Voll expandiertes Tableau für unerfüllbares M ist geschlossen

Lemma 3: Beweis

Lemma 3.
Sei B offener Ast in voll expandiertem Tableau.
Dann ist die Menge der Formeln in B erfüllbar.

Beweis: (für klausale Tableaux)

Sei N die Menge der Formeln auf B. Da B offen ist, ist $\bot$ nicht in N.
Seien $C \vee A$, $D \vee \neg A$ zwei Klauseln in N die komplementäre Literale enthalten. Einer von C, D ist nicht leer (sonst wäre B geschlossen).

Annahme: C nicht leer. Da B voll expandiert ist, wurde die β-Regel für $C \vee A$ angewandt (auch für $D \vee \neg A$ falls D nicht leer).

Fall 1: $A, \neg A \in B$: unmöglich, da B offen ist.
Fall 2: $A, L \in B$ mit L Literal in D. N erfüllbar gdw. $N \backslash \{D \vee \neg A\}$ erfüllbar.
Fall 3: $L, \neg A \in B$, mit L Literal in C. N erfüllbar gdw. $N \backslash \{C \vee A\}$ erfüllbar.
Fall 4: $L_1, L_2 \in B$, mit L_1 Literal in C, L_2 Literal in D.
N erfüllbar gdw. $N \backslash \{C \vee A, D \vee \neg A\}$ erfüllbar.

$N \mapsto N'$, N' Klauselmenge ohne komplementäre Literale und ohne $\bot$
Die Erfüllbarkeit von N' folgt aus der Vollständigkeit der Resolution.

Zusammenfassung: Tableaukalkül

Beweis durch Widerspruch und Fallunterscheidung

- Tableauregeln (mit uniformer Notation)
- Formale Definition des Kalküls
- Korrektheit und Vollständigkeit

Klauseltableau: Beispiel

(1)	$F \vee V$
(2)	$F \vee M$
(3)	$M \vee V$
(4)	$M \vee P$
(5)	$M \vee \neg P \vee V$
(6)	$F \vee M \vee V$
(7)	$F \vee M \vee P$
(8)	$F \vee \neg P \vee V$
(9)	$P \vee F$
(10)	$P \vee M$
(11)	$\neg V \vee P$
(12)	$P \vee V$
(13)	$\neg F \vee V$
(14)	$\neg P \vee \neg F$
(15)	$\neg M \vee \neg V \vee \neg P \vee F$

Klauseltableau: Beispiel

(1) $F \vee V$

(2) $F \vee M$

(3) $M \vee V$

(4) $M \vee P$

(5) $M \vee \neg P \vee V$

(6) $F \vee M \vee V$

(7) $F \vee M \vee P$

(8) $F \vee \neg P \vee V$

(9) $P \vee F$

(10) $P \vee M$

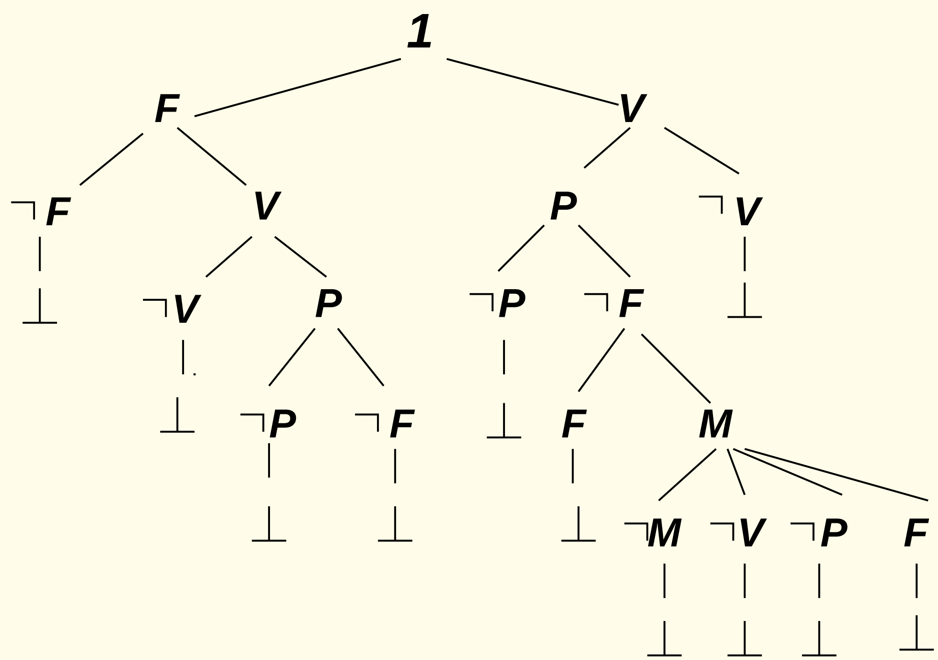
(11) $\neg V \vee P$

(12) $P \vee V$

(13) $\neg F \vee V$

(14) $\neg P \vee \neg F$

(15) $\neg M \vee \neg V \vee \neg P \vee F$



Klauseltableau: Einschränkungen des Suchraums

Regularität:

Kein Literal darf auf einem Ast mehr als einmal vorkommen

Klauseltableau: Einschränkungen des Suchraums

Regularität:

Kein Literal darf auf einem Ast mehr als einmal vorkommen

Schwache Konnektionsbedingung (Connection calculus)

Bei Erweiterung von Ast B muss mindestens eines der neuen Literale komplementär zu Literal in B sein

Klauseltableau: Einschränkungen des Suchraums

Regularität:

Kein Literal darf auf einem Ast mehr als einmal vorkommen

Schwache Konnektionsbedingung (Connection calculus)

Bei Erweiterung von Ast B muss mindestens eines der neuen Literale komplementär zu Literal in B sein.

Starke Konnektionsbedingung (Modellelimination)

Bei Erweiterung von Ast B muss mindestens eines der neuen Literale komplementär zum Blatt von B sein – außer beim ersten Schritt.

Klauseltableau: Einschränkungen des Suchraums

Theorem (hier ohne Beweis)
Regularität, starke und schwache Konnektionsbedingung erhalten Vollständigkeit.

Klauseltableau: Einschränkungen des Suchraums

Theorem (hier ohne Beweis)
Regularität, starke und schwache Konnektionsbedingung erhalten Vollständigkeit.

Falls eine Formelmenge M unerfüllbar ist, so gibt es einen Tableau für M, das geschlossen ist und die Regularitätsbedingung (bzw. starke Konnektionsbedingung, bzw. schwache Konnektionsbedingung) erfüllt.

Klauseltableau: Einschränkungen des Suchraums

Theorem (hier ohne Beweis)
Regularität, starke und schwache Konnektionsbedingung erhalten Vollständigkeit.

Jedoch

Bei starker Konnektionsbedingung kann ungünstige Erweiterung in Sackgasse führen.

(bei schwacher Konnektionsbedinung nicht)

Klauseltableau: Einschränkungen des Suchraums

Theorem (hier ohne Beweis)
Regularität, starke und schwache Konnektionsbedingung erhalten Vollständigkeit.

Jedoch

Bei starker Konnektionsbedingung kann ungünstige Erweiterung in Sackgasse führen.

(bei schwacher Konnektionsbedinung nicht)

Beispiel: $M = \{\{P\}, \{\neg Q\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg P, R\}\}$

Zuerst $\{\neg P, Q\}$: OK
Zuerst $\{\neg P, R\}$: Sackgasse

Zusammenfassung: Tableaukalkül

Beweis durch Widerspruch und Fallunterscheidung

- Tableauregeln (mit uniformer Notation)
- Formale Definition des Kalküls
- Korrektheit und Vollständigkeit

- Klauseltableau
- Regularität
- Schwache und starke Konnektionsbedingung

Nächste Vorlesung:

- Terminierung