Logik für Informatiker

3. Prädikatenlogik

Teil 2

9.06.2016

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Prädikatenlogik

Syntax

1. **Logische Symbole:**
   1.1: Wie in der Aussagenlogik: $\top, \bot; \neg; \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
   1.2: Quantoren: $\forall$, $\exists$.

2. **Nichtlogische Symbole:** Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$,
   2.1: Ω Menge von Funktionssymbolen. Notation: f/n: f hat Stelligkeit $n \geq 0$,
   2.2: Π Menge von Prädikatensymbolen. Notation: p/m: p hat Stelligkeit $m \geq 0$.
   (Das Gleichheitsprädikat $\approx$ kann (muss aber nicht) enthalten sein.)

   Funktionsssymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Konstanten.

   Prädikatensymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Aussagenvariablen.

3. **Variablen:** X vorgegebene Menge von abzählbar unendlich vielen Symbolen, die wir für (die Bezeichnung von) Variablen verwenden.

Terme

Mit $T_\Sigma(X)$ bezeichnen wir die Menge der Σ-Terme.

Menge $T_\Sigma(X)$ der Σ-Terme:

Die kleinste Menge mit: $X \subseteq T_\Sigma(X)$

Wenn
- $f \in \Omega$,
- n ist die Stelligkeit von f
- $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma(X)$

dann $f(t_1, \ldots, t_n) \in T_\Sigma(X)$

Atome

Atome (Atomare Formeln) über Σ genügen dieser Syntax:

$$\begin{array}{lcll} A, B & ::= & p(s_1, ..., s_m) & , \ p/m \in \Pi \\ \left[\right. & | & (s \approx t) & \text{(Gleichung)} \left. \right] \end{array}$$

wobei $s_1, \ldots, s_m, s, t \in T_\Sigma(X)$.

Ist $m = 0$, so handelt es sich bei p um eine Aussagenvariable.

Atome:
Formeln der Form $p(s_1, \ldots, s_m)$, wobei $p/m \in \Pi$ und $s_1, \ldots, s_m \in T_\Sigma(X)$.

Literale

$$
\begin{array}{lcll}
L & ::= & A & \text{(positives Literal)} \\
  & \mid & \neg A & \text{(negatives Literal)}
\end{array}
$$

Beispiele:

$$
\begin{array}{ll}
Mann(Vater(x)) & Vater(Jan) \approx Vater(Anna) \\
\neg Mann(Vater(x)) & \neg(Vater(Jan) \approx Vater(Anna))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
x \leq y & (x + (succ(y) + 1)) \approx z \\
\neg x \leq y & \neg((x + (succ(y) + 1)) \approx z)
\end{array}
$$

Klauseln

$$
\begin{array}{lcll}
C, D & ::= & \bot & \text{(leere Klausel)} \\
 & \mid & L_1 \vee \ldots \vee L_k,\ k \geq 1 & \text{(nichtleere Klausel)}
\end{array}
$$

Beispiele:

$\bot$

$Mann(Vater(x)) \quad \vee \quad \neg(Vater(Jan) \approx Vater(Anna))$

$\neg Frau(Vater(x))$

$\neg(x \leq y) \quad \vee \quad (x + (succ(y) + 1)) \approx z$

$x \leq y$

$\neg(x \leq y) \quad \vee \quad \neg(x \leq y) \quad \vee \quad (x \leq y)$

Formeln

Formeln über Σ:

$$
\begin{array}{lcll}
F, G, H & ::= & \bot & \text{(Falsum)} \\
& \mid & \top & \text{(Verum)} \\
& \mid & A & \text{(atomare Formel)} \\
& \mid & \neg F & \text{(Negation)} \\
& \mid & (F \wedge G) & \text{(Konjunktion)} \\
& \mid & (F \vee G) & \text{(Disjunktion)} \\
& \mid & (F \rightarrow G) & \text{(Implikation)} \\
& \mid & (F \leftrightarrow G) & \text{(Äquivalenz)} \\
& \mid & \forall x F & \text{(Allquantifizierung)} \\
& \mid & \exists x F & \text{(Existenzquantifizierung)}
\end{array}
$$

Formeln

Menge For_Σ der Formeln über Σ:

Die kleinste Menge, die

- Alle atomaren Formeln enthält,
- $\top \in \mathrm{For}_\Sigma$, $\bot \in \mathrm{For}_\Sigma$,
- Wenn $F, G \in \mathrm{For}_\Sigma$, dann auch $\neg F, F \wedge G, F \vee G, F \rightarrow G, F \leftrightarrow G \in \mathrm{For}_\Sigma$,
- Wenn $F \in \mathrm{For}_\Sigma$ und $x \in X$, dann $\forall x F \in \mathrm{For}_\Sigma, \exists x F \in \mathrm{For}_\Sigma$

Konventionen zur Notation

- Klammereinsparungen werden nach folgenden Regeln vorgenommen:
  - $\neg \quad >_p \quad \wedge \quad >_p \quad \vee \quad >_p \quad \rightarrow \quad >_p \quad \leftrightarrow$ (Präzedenzen),
  - $\vee$ und $\wedge$ sind assoziativ und kommutativ.
- $Qx_1, \ldots, x_n\ F$ fÃ¼r $Qx_1 \ldots Qx_n\ F$.
- Terme und Atome in Infix-, Präfix-, Postfix- oder Mixfixnotation; Beispiele:

$s + t$	für $+(s, t)$
$s \leq t$	für $\leq (s, t)$
$-s$	für $-(s)$
0	für $0()$

Beispiel

“Alle, die in Koblenz studieren, sind schlau”

Beispiel

"Alle, die in Koblenz studieren, sind schlau"

$\Omega = \{koblenz/0\} \quad \Pi = \{studiertIn/2, schlau/1\}$

Beispiel

"Alle, die in Koblenz studieren, sind schlau"

$\Omega = \{koblenz/0\} \quad \Pi = \{studiertIn/2, schlau/1\}$

$$\underbrace{\forall x(\underbrace{\underbrace{studiertIn(\underbrace{x}_{\substack{Variable\\ Term}}, \underbrace{koblenz}_{\substack{Konstante\\ Term}})}_{Atom} \rightarrow \underbrace{schlau(\underbrace{x}_{\substack{Variable\\ Term}})}_{Atom}}_{Formel})}_{Formel}$$

Beispiel

"Es gibt jemand, der in Landau studiert und schlau ist"

$\Omega = \{landau/0\} \qquad \Pi = \{studiertIn/2, schlau/1\}$

$$\underbrace{\exists x(\underbrace{\underbrace{studiertIn(\underbrace{x}_{\substack{Variable\\Term}}, \underbrace{landau}_{\substack{Konstante\\Term}})}_{Atom} \wedge \underbrace{schlau(\underbrace{x}_{\substack{Variable\\Term}})}_{Atom}}_{Formel})}_{Formel}$$

Beispiele

X Variablenmenge, $x, y, z \in X$; $\Sigma = \{\Omega, \Pi\}$, mit

$\Omega = \{f/2, g/3, a/0, b/0\}$ und $\Pi = \{p/2, q/1, r/0\}$

	Term	Atom	Literal	Klausel	Formel	Nichts
x						
a						
$f(g(a, y, b), x)$						
$g(a, x)$						
$p(g(a, y, b), x)$						
$p(q(a), b)$						
$\neg q(g(a, b, x))$						
$\neg q(g(a, b, x)) \vee a$						
$\neg q(g(a, b, x)) \vee p(a, a)$						
$\forall x(p(x, f(x, x)))$						
$\forall b(p(b, f(b, b)))$						

Beispiele

X Variablenmenge, $x, y, z \in X$; $\Sigma = \{\Omega, \Pi\}$, mit

$\Omega = \{f/2, g/3, a/0, b/0\}$ und $\Pi = \{p/2, q/1, r/0\}$

	Term	Atom	Literal	Klausel	Formel	Nichts
x	ja	nein	nein	nein	nein	nein
a	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$f(g(a, y, b), x)$	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$g(a, x)$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$p(g(a, y, b), x)$	nein	ja	ja	ja	ja	nein
$p(q(a), b)$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$\neg q(g(a, b, x))$	nein	nein	ja	ja	ja	nein
$\neg q(g(a, b, x)) \vee a$	nein	nein	nein	nein	nein	ja
$\neg q(g(a, b, x)) \vee p(a, a)$	nein	nein	nein	ja	ja	nein
$\forall x(p(x, f(x, x)))$	nein	nein	nein	nein	ja	nein
$\forall b(p(b, f(b, b)))$	nein	nein	nein	nein	nein	ja

Beispiel

"Alle, die in Koblenz studieren, sind schlau"

$\Omega = \{koblenz/0\} \quad \Pi = \{studiertIn/2, schlau/1\}$

$$\forall x(studiertIn(x, koblenz) \to schlau(x))$$

"Es gibt jemand, der in Landau studiert und schlau ist"

$\Omega = \{landau/0\} \quad \Pi = \{studiertIn/2, schlau/1\}$

$$\exists x(studiertIn(x, landau) \land schlau(x))$$

Formalisierung in Prädikatenlogik

Universelle Quantifizierung:

Faustregel: $\rightarrow$ ist der logische (Top-level-)Operator mit $\forall$

Häufiger Fehler: Verwendung von $\wedge$ mit $\forall$

Formalisierung in Prädikatenlogik

Universelle Quantifizierung:

Faustregel: $\rightarrow$ ist der logische (Top-level-)Operator mit $\forall$

Häufiger Fehler: Verwendung von $\wedge$ mit $\forall$

Beispiel

"Alle, die in Koblenz studieren, sind schlau."

Richtig: $\forall x(\mathit{studiertIn}(x, \mathit{koblenz}) \rightarrow \mathit{schlau}(x))$

Falsch: $\forall x(\mathit{studiertIn}(x, \mathit{koblenz}) \wedge \mathit{schlau}(x))$

"Alle studieren in Koblenz und sind schlau."

Formalisierung in Prädikatenlogik

Existenzielle Quantifizierung

Faustregel: $\wedge$ ist der logische (Top-level-)Operator mit $\exists$

Häufiger Fehler: Verwendung von $\rightarrow$ mit $\exists$

Formalisierung in Prädikatenlogik

Existenzielle Quantifizierung

Faustregel: $\wedge$ ist der logische (Top-level-)Operator mit $\exists$

Häufiger Fehler: Verwendung von $\rightarrow$ mit $\exists$

Beispiel

“Es gibt jemand, der in Landau studiert und schlau ist.”

Richtig: $\exists x(\mathit{studiertIn}(x, \mathit{landau}) \wedge \mathit{schlau}(x))$

Falsch: $\exists x(\mathit{studiertIn}(x, \mathit{landau}) \rightarrow \mathit{schlau}(x))$

“Es gibt jemanden, der, falls er/sie in Landau studiert, schlau ist.”
Trivial wahr, wenn es irgendjemanden gibt, der nicht in Landau studiert.

Beispiel: Tante Agatha

Jemand, der in Schloss Dreadbury wohnt, hat Tante Agatha ermordet. Agatha, ihr Butler und ihr Neffe Charles waren die einzigen Bewohner von Schloss Dreadbury. Ein Mörder hasst immer sein Opfer und ist niemals reicher als sein Opfer. Charles hasst niemanden, den Tante Agatha gehasst hat. Agatha hat jeden gehasst außer ihrem Butler. Der Butler hasst jeden, der nicht reicher ist als Tante Agatha. Der Butler hasst jeden, den Tante Agatha gehasst hat. Niemand hasst jeden. Agatha war nicht der Butler.

Wer hat Tante Agatha ermordet?

Beispiel: Tante Agatha

Jemand, der in Schloss Dreadbury wohnt, hat Tante Agatha ermordet.

Agatha, ihr Butler und ihr Neffe Charles waren die einzigen Bewohner von Schloss Dreadbury.

Beispiel: Tante Agatha

Jemand, der in Schloss Dreadbury wohnt, hat Tante Agatha ermordet.

- $\exists x\ (\text{schlossbewohner}(x) \wedge \text{ermordet}(x, \text{a}))$

Agatha, ihr Butler und ihr Neffe Charles waren die einzigen Bewohner von Schloss Dreadbury.

Beispiel: Tante Agatha

Jemand, der in Schloss Dreadbury wohnt, hat Tante Agatha ermordet.

- $\exists x\ (\mathrm{schlossbewohner}(x) \land \mathrm{ermordet}(x, \mathrm{a}))$

Agatha, ihr Butler und ihr Neffe Charles waren die einzigen Bewohner von Schloss Dreadbury.

- $\forall x\ (\mathrm{schlossbewohner}(x) \leftrightarrow (x \approx \mathrm{a} \lor x \approx \mathrm{b} \lor x \approx \mathrm{c}))$

Beispiel: Tante Agatha

Ein Mörder hasst immer sein Opfer und ist niemals reicher als sein Opfer.

Charles hasst niemanden, den Tante Agatha gehasst hat.

Agatha hat jeden gehasst außer ihrem Butler.

Beispiel: Tante Agatha

Ein Mörder hasst immer sein Opfer und ist niemals reicher als sein Opfer.

- $\forall x, y \; (\text{ermordet}(x, y) \rightarrow \text{hasst}(x, y))$
  $\forall x, y \; (\text{ermordet}(x, y) \rightarrow \neg \, \text{reicher}(x, y))$

Charles hasst niemanden, den Tante Agatha gehasst hat.

Agatha hat jeden gehasst außer ihrem Butler.

Beispiel: Tante Agatha

Ein Mörder hasst immer sein Opfer und ist niemals reicher als sein Opfer.

- $\forall x, y\ (\text{ermordet}(x, y) \rightarrow \text{hasst}(x, y))$
  $\forall x, y\ (\text{ermordet}(x, y) \rightarrow \neg\, \text{reicher}(x, y))$

Charles hasst niemanden, den Tante Agatha gehasst hat.

- $\forall x\ (\text{hasst}(\text{c}, x) \rightarrow \neg\, \text{hasst}(\text{a}, x))$

Agatha hat jeden gehasst außer ihrem Butler.

Beispiel: Tante Agatha

Ein Mörder hasst immer sein Opfer und ist niemals reicher als sein Opfer.

- $\forall x, y\ (\mathrm{ermordet}(x, y) \to \mathrm{hasst}(x, y))$
  $\forall x, y\ (\mathrm{ermordet}(x, y) \to \neg\, \mathrm{reicher}(x, y))$

Charles hasst niemanden, den Tante Agatha gehasst hat.

- $\forall x\ (\mathrm{hasst}(\mathrm{c}, x) \to \neg\, \mathrm{hasst}(\mathrm{a}, x))$

Agatha hat jeden gehasst außer ihrem Butler.

- $\forall x\ (\neg\, \mathrm{hasst}(\mathrm{a}, x) \leftrightarrow x \approx \mathrm{b})$

Beispiel: Tante Agatha

Der Butler hasst jeden, der nicht reicher ist als Tante Agatha.

- $\forall x\ (\neg\, \text{reicher}(x, \text{a}) \rightarrow \text{hasst}(\text{b}, x))$

Der Butler hasst jeden, den Tante Agatha gehasst hat.

- $\forall x\ (\text{hasst}(\text{a}, x) \rightarrow \text{hasst}(\text{b}, x))$

Niemand hasst jeden.

- $\forall x\ \exists y\ (\neg\, \text{hasst}(x, y))$

Agatha war nicht der Butler.

- $\neg\, \text{a} \approx \text{b}$

Beispiel: Arithmetik

$$\begin{aligned}
\Sigma_{PA} &= (\Omega_{PA},\ \Pi_{PA}) \\
\Omega_{PA} &= \{0/0,\ +/2,\ */2,\ s/1\} \\
\Pi_{PA} &= \{\leq /2,\ < /2, \approx /2\}
\end{aligned}$$

$+,\ *$ infix; $* >_p +$

Formelbeispiele über dieser Signatur sind

$\forall x, y (x \leq y \leftrightarrow \exists z (x + z \approx y))$
$\exists x \forall y (x + y \approx y)$
$\forall x, y (x * s(y) \approx x * y + x)$
$\forall x, y (s(x) \approx s(y) \rightarrow x \approx y)$
$\forall x \exists y\ x < y$

Gebundene und freie Variablen

Gebundene und freie Variablen

Definitionen:

- In QxF, $Q \in \{\exists, \forall\}$, heißt F der Bindungsbereich des Quantors Qx.
- Ein Auftreten einer Variablen x heißt gebunden, wenn es zum Bindungsbereich eines Quantors Qx gehört.
- Alle anderen Auftreten von Variablen heißen frei.

Formeln ohne freie Variablen heißen Satzformen.

Variablenfreie Formeln heißen Grundformeln.

Beispiel

$$\forall y \quad \overbrace{(\forall x \quad \overbrace{p(x)}^{Bind.} \quad \rightarrow \quad q(x, y))}^{Bindungsbereich}$$

Beispiel

$$p(z) \rightarrow \forall x\, (q(x, z) \land \exists z\, r(y, z))$$

Beispiel

$$p(z) \to \forall x\, (q(x, z) \wedge \exists z\, r(y, z))$$

- x gebunden
- y frei
- z frei und gebunden

Substitution eines Termes für eine Variable

Substitution eines Termes für eine Variable

Mit $F[s/x]$ bezeichnen wir das Resultat der Substitution aller freien Auftreten von x in F durch den Term s. $F[s/x]$ sei durch strukturelle Induktion über den Aufbau von F wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
x[s/x] &= s \\
x'[s/x] &= x' \ ; \quad \text{falls } x' \neq x \\
f(s_1, \ldots, s_n)[s/x] &= f(s_1[s/x], \ldots, s_n[s/x]) \\
\bot[s/x] &= \bot \\
\top[s/x] &= \top \\
p(s_1, \ldots, s_n)[s/x] &= p(s_1[s/x], \ldots, s_n[s/x]) \\
(u \approx v)[s/x] &= (u[s/x] \approx v[s/x]) \\
\neg F[s/x] &= \neg(F[s/x]) \\
(F \rho G)[s/x] &= (F[s/x] \rho G[s/x]) \ ; \quad \text{für alle binären Junktoren } \rho \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \\
(QyF)[s/x] &= Qz((F[z/y])[s/x]) \ ; \quad z \text{ neue Variable}
\end{aligned}
$$

Beispiel

Terme:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$x, y, z, u \in X$

$g(f(x), g(f(x), z)) \quad [g(y, u)/x]$

$\quad = g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), z))$

Beispiel

Atome:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$x, y, z, u \in X$

$$p(g(f(x), g(f(x), z)),\ \ y)\ \ [g(y, u)/x]$$

$$= p(g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), z)),\ \ y)$$

Beispiel

Formeln ohne Quantoren:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$x, y, z, u \in X$

$$p(g(f(x), g(f(x), z)),\ y) \quad \wedge \quad (g(x, y) \approx f(g(z, z))) \quad [g(y, u)/x]$$

$$= p(g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), z)), y) \quad \wedge \quad (g(g(y, u), y) \approx f(g(z, z)))$$

Formeln mit Quantoren: Problematik

$$(QyF)[s/x] = Qz((F[z/y])[s/x]) \ ; \quad z \text{ neue Variable}$$

Der Grund für die Umbenennung der gebundenen Variablen y in eine neue „unbenutzte“ Variable z ist die Vermeidung des Einfangens freier Variablen in s.

Sollte y in s auftreten, wären sonst diese Auftreten nach erfolgter Substitution gebunden.

Beispiel

Formeln mit Quantoren:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$(\ \forall x(p(x, g(f(x), y))) \ \wedge \ \exists z(x \approx g(y, z)) \ ) \quad [g(y, z)/x]$$

Beispiel

Formeln mit Quantoren:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$(\ \forall x(p(x, g(f(x), y))) \ \land \ \exists z(x \approx g(y, z)) \ ) \quad [g(y, z)/x]$$

$$= \forall x(p(x, g(f(x), y)))[g(y, z)/x] \ \land \ \exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x]$$

Beispiel

Formeln mit Quantoren:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$(\forall x(p(x, g(f(x), y))) \;\wedge\; \exists z(x \approx g(y, z)) \;) \quad [g(y, z)/x]$$

$$= \forall x(p(x, g(f(x), y)))[g(y, z)/x] \;\wedge\; \exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x]$$

$$= \forall v(p(x, g(f(x), y))\,[v/x])[g(y, z)/x] \wedge \exists u(((x \approx g(y, z))[u/z])[g(y, z)/x])$$

Beispiel

Formeln mit Quantoren:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$(\;\forall x(p(x, g(f(x), y))) \;\wedge\; \exists z(x \approx g(y, z)) \;) \quad [g(y, z)/x]$$

$$= \forall x(p(x, g(f(x), y)))[g(y, z)/x] \;\wedge\; \exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x]$$

$$= \forall v(p(x, g(f(x), y))\,[v/x])[g(y, z)/x] \wedge \exists u(((x \approx g(y, z))[u/z])[g(y, z)/x])$$

$$= \forall v(p(v, g(f(v), y)))[g(y, z)/x] \;\wedge\; \exists u((x \approx g(y, u))[g(y, z)/x])$$

Beispiel

Formeln mit Quantoren:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$(\ \forall x(p(x, g(f(x), y))) \ \land \ \exists z(x \approx g(y, z)) \ ) \quad [g(y, z)/x]$$

$$= \forall x(p(x, g(f(x), y)))[g(y, z)/x] \ \land \ \exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x]$$

$$= \forall v(p(x, g(f(x), y)) \, [v/x])[g(y, z)/x] \ \land \ \exists u(((x \approx g(y, z))[u/z])[g(y, z)/x])$$

$$= \forall v(p(v, g(f(v), y)))[g(y, z)/x] \ \land \ \exists u((x \approx g(y, u))[g(y, z)/x])$$

$$= \forall v(p(v, g(f(v), y))) \ \land \ \exists u(g(y, z) \approx g(y, u))$$