Logik für Informatiker

3. Prädikatenlogik

Teil 3

14.06.2016

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Organisatorisches

Am Donnerstag, den 16.06.2016: Vorlesung

Am Dienstag, den 28.06.2016, keine Vorlesung,
sondern eine Übung (Raum M001, 16:00-18:00)

Keine Übungen am Donnerstag, den 30.06.2016
und am Freitag, den 1.07.2016.

Prädikatenlogik

Syntax

1. **Logische Symbole:**
   1.1: Wie in der Aussagenlogik: $\top$, $\bot$; $\neg$; $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
   1.2: Quantoren: $\forall$, $\exists$.

2. **Nichtlogische Symbole:** Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$,
   2.1: Ω Menge von Funktionssymbolen. Notation: f/n: f hat Stelligkeit $n \geq 0$,
   2.2: Π Menge von Prädikatensymbolen. Notation: p/m: p hat Stelligkeit $m \geq 0$.
   (Das Gleichheitsprädikat $\approx$ kann (muss aber nicht) enthalten sein.)

   Funktionsssymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Konstante

   Prädikatensymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Aussagenvariablen

3. **Variablen:** X vorgegebene Menge von abzählbar unendlich vielen Symbolen ist, die wir für (die Bezeichnung von) Variablen verwenden.

- Terme
- Formeln
- Substitutionen

Substitution eines Termes für eine Variable

Mit $F[s/x]$ bezeichnen wir das Resultat der Substitution aller freien Auftreten von x in F durch den Term s. $F[s/x]$ sei durch strukturelle Induktion über den Aufbau von F wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
x[s/x] &= s \\
x'[s/x] &= x' \ ; \quad \text{falls } x' \neq x \\
f(s_1, \ldots, s_n)[s/x] &= f(s_1[s/x], \ldots, s_n[s/x]) \\
\bot[s/x] &= \bot \\
\top[s/x] &= \top \\
p(s_1, \ldots, s_n)[s/x] &= p(s_1[s/x], \ldots, s_n[s/x]) \\
(u \approx v)[s/x] &= (u[s/x] \approx v[s/x]) \\
\neg F[s/x] &= \neg(F[s/x]) \\
(F \rho G)[s/x] &= (F[s/x] \rho G[s/x]) \ ; \quad \text{für alle binären Junktoren } \rho \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \\
(QyF)[s/x] &= Qz((F[z/y])[s/x]) \ ; \quad z \text{ neue Variable}
\end{aligned}
$$

Beispiel

Formeln ohne Quantoren:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$x, y, z, u \in X$

$$p(g(f(x), g(f(x), z)),\ y) \quad \wedge \quad (g(x, y) \approx f(g(z, z))) \quad [g(y, u)/x]$$

$$= p(g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), z)), y) \quad \wedge \quad (g(g(y, u), y) \approx f(g(z, z)))$$

Formeln mit Quantoren: Problematik

$$(QyF)[s/x] = Qz((F[z/y])[s/x]) \; ; \quad z \text{ neue Variable}$$

Der Grund für die Umbenennung der gebundenen Variablen y in eine neue „unbenutzte“ Variable z ist die Vermeidung des Einfangens freier Variablen in s.

Sollte y in s auftreten, wären sonst diese Auftreten nach erfolgter Substitution gebunden.

Beispiel

Formeln mit Quantoren:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$(\forall x(p(x, g(f(x), y))) \ \wedge \ \exists z(x \approx g(y, z)) \ ) \quad [g(y, z)/x]$$

$$= \forall x(p(x, g(f(x), y)))[g(y, z)/x] \ \wedge \ \exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x]$$

$$= \forall v(p(x, g(f(x), y)) \, [v/x])[g(y, z)/x] \wedge \exists u(((x \approx g(y, z))[u/z])[g(y, z)/x])$$

$$= \forall v(p(v, g(f(v), y)))[g(y, z)/x] \ \wedge \ \exists u((x \approx g(y, u))[g(y, z)/x])$$

$$= \forall v(p(v, g(f(v), y))) \ \wedge \ \exists u(g(y, z) \approx g(y, u))$$

Substitution allgemein

Definition. Substitutionen sind Abbildungen

$$\sigma : X \to T_\Sigma(X),$$

so dass der Bereich von σ, d.h. die Menge

$$dom(\sigma) = \{x \in X \mid \sigma(x) \neq x\},$$

endlich ist. Die Menge der eingeführten Variablen, d.h. der Variablen die in einem der Terme $\sigma(x)$, für $x \in dom(\sigma)$, auftreten, wird mit $codom(\sigma)$ bezeichnet.

Substitutionen schreiben wir auch als $[s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n]$, x_i pw. verschieden, und meinen dann die Abbildung

$$[s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n](y) = \begin{cases} s_i, & \text{falls } y = x_i \\ y, & \text{sonst} \end{cases}$$

Ab jetzt schreiben wir für die Applikation $\sigma(x)$ von Substitutionen $x\sigma$.

Anwendung einer Substitution

„Homomorphe“ Fortsetzung von σ auf Terme und Formeln:

$$
\begin{aligned}
f(s_1, \ldots, s_n)\sigma &= f(s_1\sigma, \ldots, s_n\sigma)\\
\bot\sigma &= \bot\\
\top\sigma &= \top\\
p(s_1, \ldots, s_n)\sigma &= p(s_1\sigma, \ldots, s_n\sigma)\\
(u \approx v)\sigma &= (u\sigma \approx v\sigma)\\
\neg F\sigma &= \neg(F\sigma)\\
(F\rho G)\sigma &= (F\sigma\rho G\sigma)\ ; \quad \text{für alle binären Junktoren } \rho\\
(QxF)\sigma &= Qz((F[z/x])\sigma);\ \text{wobei } z \text{ „neue“ Variable}
\end{aligned}
$$

Abänderung einer Substitution σ an x zu t:

$$
\sigma[x \to t](y) = \begin{cases} t, & \text{falls } y = x\\ \sigma(y), & \text{sonst} \end{cases}
$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Terme

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$g(f(x), g(f(x), z)) \quad [g(y, u)/x, f(x)/y, a/z]$$

$$= g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), a))$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Atome

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$p(g(f(x), g(f(x), z)),\ y)\ \ [g(y, u)/x, f(x)/y, a/z]$$

$$= p(g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), a)), f(x))$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Formeln ohne Quantoren

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$p(g(f(x), g(f(x), z)),\ y) \ \wedge\ (g(x, y) \approx f(g(z, z)))\ \ [g(y, u)/x, f(x)/y, a/z]$$

$$= p(g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), a)), f(x)) \ \wedge\ (g(g(y, u), f(x)) \approx f(g(a, a)))$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Formeln mit Quantoren

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx/2\}$

$(\forall x(p(x, g(f(x), y))) \wedge \exists z(x \approx g(y, z)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Formeln mit Quantoren

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$(\forall x(p(x, g(f(x), y))) \wedge \exists z(x \approx g(y, z)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]$$

$$= \forall x(p(x, g(f(x), y)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z] \ \wedge$$
$$\exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Formeln mit Quantoren

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$(\forall x(p(x, g(f(x), y))) \wedge \exists z(x \approx g(y, z)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]$$

$$= \forall x(p(x, g(f(x), y)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z] \;\wedge$$
$$\exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]$$

$$= \forall v((p(x, g(f(x), y))[v/x])[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]) \;\wedge$$
$$\exists u(((x \approx g(y, z))[u/z])[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z])$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Formeln mit Quantoren

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$(\forall x(p(x, g(f(x), y))) \wedge \exists z(x \approx g(y, z)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]$$

$$\begin{aligned}
&= \forall x(p(x, g(f(x), y)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z] \;\wedge \\
&\quad\; \exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z] \\
&= \forall v((p(x, g(f(x), y))[v/x])[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]) \;\wedge \\
&\quad\; \exists u(((x \approx g(y, z))[u/z])[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]) \\
&= \forall v(p(v, g(f(v), f(x)))) \;\wedge\; \exists u((x \approx g(y, u))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z])
\end{aligned}$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Formeln mit Quantoren

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx/2\}$

$$(\forall x(p(x, g(f(x), y))) \wedge \exists z(x \approx g(y, z)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]$$

$$= \forall x(p(x, g(f(x), y)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z] \;\wedge\; \exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]$$

$$= \forall v((p(x, g(f(x), y))[v/x])[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]) \;\wedge\; \exists u(((x \approx g(y, z))[u/z])[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z])$$

$$= \forall v(p(v, g(f(v), f(x)))) \;\wedge\; \exists u((x \approx g(y, u))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z])$$

$$= \forall v(p(v, g(f(v), f(x)))) \;\wedge\; \exists u(g(y, z) \approx g(f(x), u))$$

Bis jetzt

Prädikatenlogik

- Syntax
  - Signatur
  - Terme
  - Formeln
  - Substitutionen

Jetzt

Prädikatenlogik

- Syntax
- Semantik

Semantik

Semantik geben bedeutet für logische Systeme, einen Begriff von Wahrheit für Formeln zu definieren. Das hier für die Prädikatenlogik zu definierende Konzept geht auf Tarski zurück.

In der klassischen Logik (zurückgehend auf Aristoteles) gibt es „nur“ die zwei Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“, die wir mit 1 und 0 bezeichnen.

Strukturen

Definition.

Eine Σ-Struktur (bzw. Σ-Interpretation bzw. Σ-Modell) ist ein Tripel

$$\mathcal{A} = (U,\ (f_{\mathcal{A}} : U^n \to U)_{f/n \in \Omega},\ (p_{\mathcal{A}} \subseteq U^m)_{p/m \in \Pi})$$

wobei $U \neq \emptyset$ eine Menge, genannt Universum von $\mathcal{A}$.

Oft identifizieren wir U mit $\mathcal{A}$, wenn die Interpretation der Funktions- und Prädikatensymbole eindeutig aus dem Kontext hervorgeht.

Mit Σ-Str bezeichnen wir die Menge aller Σ-Strukturen.

Strukturen

Beispiel:

$\Sigma = (\{+/2, 0/0\}, \{\leq, \approx\})$

$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \{0_{\mathcal{N}}, +_{\mathcal{N}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}, \{\leq_{\mathcal{N}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \approx_{\mathcal{N}}\})$

$0_{\mathcal{N}} = 0 \in \mathbb{N},$

$+_{\mathcal{N}} (n_1, n_1) = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$

$\leq_{\mathcal{N}} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 \leq n_2\}$

Strukturen

Beispiel:

$\Sigma = (\{+/2, 0/0\}, \{\leq, \approx\})$

Eine andere Σ-Struktur:

$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{0_\mathcal{A}, +_\mathcal{A} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}, \{\leq_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \approx_\mathcal{N}\})$

$$0_\mathcal{A} = 1 \in \mathbb{N},$$

$$+_\mathcal{A}(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n_2 = 0 \\ n_1^{n_2} & \text{wenn } n_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\leq_\mathcal{A} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 = n_2^2\}$$

Strukturen

Beispiel:

$\Sigma = (\{+/2, 0/0\}, \{\leq, \approx\})$

Eine dritte Σ-Struktur:

$\mathcal{B} = (\{a, b\}, \{0_{\mathcal{B}}, +_{\mathcal{B}}{:}\{a, b\}\times\{a, b\}\rightarrow\{a, b\}\}, \{\leq_{\mathcal{B}}\subseteq \{a, b\}\times\{a, b\}, \approx_{\mathcal{B}}\})$

$$0_{\mathcal{B}} = a \in \{a, b\},$$
$$+_{\mathcal{B}}(a, a) = a; \quad +_{\mathcal{B}}(a, b) = b;$$
$$+_{\mathcal{B}}(b, a) = b; \quad +_{\mathcal{B}}(b, b) = b;$$

$$\leq_{\mathcal{B}} = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$$

Valuationen

Variablen für sich haben keine Bedeutung. Hierfür müssen Wertebelegungen (Valuationen) explizit oder implizit aus dem Kontext zur Verfügung stehen.

Definition.

Unter einer (Variablen-) Belegung oder einer Valuation (über einer Σ-Struktur $\mathcal{A}$) versteht man eine Abbildung

$$\beta : X \to U$$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β

Induktive Definition:

$$\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x), \qquad x \in X$$

$$\mathcal{A}(\beta)(f(s_1, \ldots, s_n)) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(s_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)), \qquad f/n \in \Omega$$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β

Induktive Definition:

$$\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x), \qquad x \in X$$

$$\mathcal{A}(\beta)(f(s_1, \ldots, s_n)) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(s_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)), \qquad f/n \in \Omega$$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β, $\mathcal{A}(\beta)(t)$:

- Falls $t = x \in X$: $\mathcal{A}(\beta)(t) = \beta(x)$
- Falls $t = c$ eine Konstante: $\mathcal{A}(\beta)(t) = c_{\mathcal{A}}$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β

Induktive Definition:

$$\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x), \qquad x \in X$$

$$\mathcal{A}(\beta)(f(s_1, \ldots, s_n)) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(s_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)), \qquad f/n \in \Omega$$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β, $\mathcal{A}(\beta)(t)$:

- Falls $t = x \in X$: $\mathcal{A}(\beta)(t) = \beta(x)$
- Falls $t = c$ eine Konstante: $\mathcal{A}(\beta)(t) = c_{\mathcal{A}}$
- Falls $t = f(t_1, \ldots, t_n)$:
  $\mathcal{A}(\beta)(t) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(t_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(t_n))$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β

Beispiel:

$\Sigma = (\{+/2, 0/0\}, \{\leq, \approx\})$

$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \{0_\mathcal{N}, +_\mathcal{N} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}, \{\leq_\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \approx_\mathcal{N}\})$

$0_\mathcal{N} = 0 \in \mathbb{N},$

$+_\mathcal{N} (n_1, n_1) = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$

$\beta : \{x, y, z\} \to \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 5, \beta(y) = 10, \beta(z) = 3$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}(\beta)((x + (y + z)) + (z + 0)) = \\
&\quad = (\beta(x) +_\mathcal{N} (\beta(y) +_\mathcal{N} \beta(z))) +_\mathcal{N} (\beta(z) +_\mathcal{N} 0_\mathcal{N}) = \\
&\quad = (5 + (10 + 3)) + (3 + 0) = 21
\end{aligned}$$

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

Die Menge der Wahrheitswerte sei $\{0, 1\}$.

$\mathcal{A}(\beta) : \mathsf{For}_\Sigma \to \{0, 1\}$ wird induktiv über Aufbau von F wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}(\beta)(\bot) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(\top) = 1$$

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(p(s_1,\ldots,s_n)) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad (\mathcal{A}(\beta)(s_1),\ldots,\mathcal{A}(\beta)(s_n)) \in p_{\mathcal{A}}$$

$$\mathcal{A}(\beta)(s \approx t) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(s) = \mathcal{A}(\beta)(t)$$

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\beta)(\neg F) &= 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0 \\
\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) &= \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))
\end{aligned}$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Erklärung:

- $\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = \neg_b \mathcal{A}(\beta)(F)$, wobei $\neg_b$ die Negation auf den Wahrheitswerten $\{0, 1\}$ ist, mit Wahrheitstabelle:

w	$\neg_b w$
0	1
1	0

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Erklärung:

- $\mathcal{A}(\beta)(F \wedge G) = \mathcal{A}(\beta)(F) \wedge_b \mathcal{A}(\beta)(G)$, wobei $\wedge_b$ die Konjunktion auf den Wahrheitswerten $\{0, 1\}$ ist, mit Wahrheitstabelle:

$\wedge_b$	0	1
0	0	0
1	0	1

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Erklärung:

- $\mathcal{A}(\beta)(F \vee G) = \mathcal{A}(\beta)(F) \vee_b \mathcal{A}(\beta)(G)$, wobei $\vee_b$ die Disjunktion auf den Wahrheitswerten $\{0, 1\}$ ist, mit Wahrheitstabelle:

$\vee_b$	0	1
0	0	1
1	1	1

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Erklärung:

- $\mathcal{A}(\beta)(F \rightarrow G) = \mathcal{A}(\beta)(F) \rightarrow_b \mathcal{A}(\beta)(G)$, wobei $\rightarrow_b$ die Implikation auf den Wahrheitswerten $\{0, 1\}$ ist, mit Wahrheitstabelle:

$\rightarrow_b$	0	1
0	1	1
1	0	1

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit ρ_b die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Erklärung:

- $\mathcal{A}(\beta)(F \leftrightarrow G) = \mathcal{A}(\beta)(F) \leftrightarrow_b \mathcal{A}(\beta)(G)$, wobei $\leftrightarrow_b$ die Äquivalenz auf den Wahrheitswerten $\{0, 1\}$ ist, mit Wahrheitstabelle:

$\leftrightarrow_b$	0	1
0	1	0
1	0	1

Beispiel

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \quad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ mit Gleichheit $\approx$.

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_{\mathcal{A}}, *_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, & \{\leq, <_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ \ ) \\
\qquad n_1 +_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 + n_2 & \quad (n_1, n_2) \in \leq_{\mathcal{A}} \text{ iff } n_1 \leq n_2 \text{ in } \mathbb{N} \\
\qquad n_1 *_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 \cdot n_2 & \quad (n_1, n_2) \in <_{\mathcal{A}} \text{ iff } n_1 < n_2 \text{ in } \mathbb{N} \\
\quad \mathrm{s}_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, & \text{gerade}_{\mathcal{A}}, \text{ungerade}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N}\} \\
\qquad \mathrm{s}(n) = n + 1 & \quad \text{gerade}_{\mathcal{A}} = \{0, 2, 4, \ldots, 2k \ldots\} \\
\quad 0_{\mathcal{A}} = 0 \in \mathbb{N}\} & \quad \text{ungerade}_{\mathcal{A}} = \{1, 3, 5, \ldots, 2k + 1 \ldots\},
\end{array}$$

Konvention: Auf den nächsten Folien wird der Unterschied zwischen den natürlichen Zahlen 0, 1 und den Wahrheitswerten 0 (falsch) und 1 (wahr) deutlich gemacht, indem wir die Wahrheitswerte in orangener Farbe schreiben.

Nota Bene:

- Der Wert eines Termes t in $\mathcal{A}$ bzgl. β ist ein Element in das Universum von $\mathcal{A}$.
- Der Wahrheitswert einer Formel F in $\mathcal{A}$ bzgl. β ist ein Wahrheitswert (0 oder 1).

Beispiel

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \qquad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ mit Gleichheit $\approx$.

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_\mathcal{A}, *_\mathcal{A} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad \{\leq, <_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;)$$

$$n_1 +_\mathcal{A} n_2 = n_1 + n_2 \qquad (n_1, n_2) \in \leq_\mathcal{A} \text{ iff } n_1 \leq n_2 \text{ in } \mathbb{N}$$

$$n_1 *_\mathcal{A} n_2 = n_1 \cdot n_2 \qquad (n_1, n_2) \in <_\mathcal{A} \text{ iff } n_1 < n_2 \text{ in } \mathbb{N}$$

$$\mathrm{s}_\mathcal{A} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad \text{gerade}_\mathcal{A}, \text{ungerade}_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}\}$$

$$\mathrm{s}(n) = n + 1 \qquad \text{gerade}_\mathcal{A} = \{0, 2, 4, \ldots, 2k \ldots\}$$

$$0_\mathcal{A} = 0 \in \mathbb{N}\} \qquad \text{ungerade}_\mathcal{A} = \{1, 3, 5, \ldots, 2k + 1 \ldots\},$$

$\beta : X \to \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 4$

(1) $\mathcal{A}(\beta)(\text{gerade}(x)) = 0$ Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x) = 1 \notin \text{gerade}_\mathcal{A}$

(2) $\mathcal{A}(\beta))(s(s(x) + s(0))\approx y) = 1$ Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(s(s(x) + s(0))) = s_\mathcal{A}(s_\mathcal{A}(\beta(x)) +_\mathcal{A} s_\mathcal{A}(0_\mathcal{A}))$
$= ((1+1)+(0+1))+1 = 4$
$\mathcal{A}(\beta)(y) = 4$
und $4 = 4$

(3) $\mathcal{A}(\beta))(x \approx y) = 0$ Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(x) = 1; \quad \mathcal{A}(\beta)(y) = 4, \quad 1 \neq 4$

Beispiel

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \quad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ with equality $\approx$.

$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_{\mathcal{A}}, *_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},$

$n_1 +_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 + n_2$

$n_1 *_{\mathcal{A}} n_2 = n_1 \cdot n_2$

$\mathsf{s}_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},$

$\mathsf{s}(n) = n + 1$

$0_{\mathcal{A}} = 0 \in \mathbb{N}\}$

$\{\leq, <_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;)$

$(n_1, n_2) \in \leq_{\mathcal{A}}$ iff $n_1 \leq n_2$ in $\mathbb{N}$

$(n_1, n_2) \in <_{\mathcal{A}}$ iff $n_1 < n_2$ in $\mathbb{N}$

$\text{gerade}_{\mathcal{A}}, \text{ungerade}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{N}\}$

$\text{gerade}_{\mathcal{A}} = \{0, 2, 4, \ldots, 2k \ldots\}$

$\text{ungerade}_{\mathcal{A}} = \{1, 3, 5, \ldots, 2k + 1 \ldots\},$

$\beta : X \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 4$

(4) $\mathcal{A}(\beta)(\neg\text{gerade}(x)) = \neg_b \mathcal{A}(\beta)(\text{gerade}(x)) = \neg_b 0 = 1$

(5) $\mathcal{A}(\beta)(x \leq s(0) \vee \text{gerade}(x)) = \mathcal{A}(\beta)(x \leq s(0)) \vee_b \mathcal{A}(\beta)(\text{gerade}(x)) = 1 \vee_b 0 = 1$

Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(x \leq s(0)) = 1 : \mathcal{A}(\beta)(x) = 1, \mathcal{A}(s(0)) = s_{\mathcal{A}}(0_{\mathcal{A}}) = 0 + 1 = 1$, und $(1, 1) \in \leq_{\mathcal{A}}$.

(6) $\mathcal{A}(\beta)(y \leq s(0) \rightarrow \text{ungerade}(y)) = \mathcal{A}(\beta)(y \leq s(0)) \rightarrow_b \mathcal{A}(\beta)(\text{ungerade}(y)) = 0 \rightarrow_b 0 = 1$

Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(y \leq s(0)) = 0$, da $\beta(y) = 4, \beta(s(0)) = 1$ und $(4, 1) \notin \leq_{\mathcal{A}}$;
$\mathcal{A}(\beta)(\text{ungerade}(y)) = 0$ da $\beta(y) = 4 \notin \text{ungerade}_{\mathcal{A}}$.