# Logik für Informatiker

## 3. Prädikatenlogik

## Teil 4

16.06.2016

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

# Prädikatenlogik

## Syntax

1. **Logische Symbole:**
   1.1: Wie in der Aussagenlogik: $\top, \bot; \neg; \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
   1.2: Quantoren: $\forall$, $\exists$.

2. **Nichtlogische Symbole:** Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$,
   2.1: $\Omega$ Menge von Funktionssymbolen. Notation: $f/n$: $f$ hat Stelligkeit $n \geq 0$,
   2.2: $\Pi$ Menge von Prädikatensymbolen. Notation: $p/m$: $p$ hat Stelligkeit $m \geq 0$.
   (Das Gleichheitsprädikat $\approx$ kann (muss aber nicht) enthalten sein.)

   Funktionsssymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Konstante

   Prädikatensymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Aussagenvariablen

3. **Variablen:** $X$ vorgegebene Menge von abzählbar unendlich vielen Symbolen ist, die wir für (die Bezeichnung von) Variablen verwenden.

- Terme
- Formeln
- Substitutionen

# Prädikatenlogik

## Semantik

- $\Sigma$-Struktur

$$\mathcal{A} = (U,\ (f_{\mathcal{A}} : U^n \to U)_{f/n \in \Omega},\ (p_{\mathcal{A}} \subseteq U^m)_{p/m \in \Pi})$$

  wobei $U \neq \emptyset$ eine Menge, genannt Universum von $\mathcal{A}$.

- Valuation: Abbildung $\beta : X \to U$
- Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. $\beta$
- Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. $\beta$

# Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. $\beta$

**Induktive Definition:**

$$\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x), \qquad x \in X$$

$$\mathcal{A}(\beta)(f(s_1, \ldots, s_n)) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(s_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)), \qquad f/n \in \Omega$$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. $\beta$, $\mathcal{A}(\beta)(t)$:

- Falls $t = x \in X$: $\mathcal{A}(\beta)(t) = \beta(x)$
- Falls $t = c$ eine Konstante: $\mathcal{A}(\beta)(t) = c_{\mathcal{A}}$
- Falls $t = f(t_1, \ldots, t_n)$:
  $\mathcal{A}(\beta)(t) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(t_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(t_n))$

# Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. $\beta$

$\mathcal{A}(\beta) : \mathrm{For}_\Sigma \to \{0, 1\}$ wird induktiv über Aufbau von $F$ wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\beta)(\bot) &= 0 \\
\mathcal{A}(\beta)(\top) &= 1 \\[1em]
\mathcal{A}(\beta)(p(s_1, \ldots, s_n)) &= 1 \quad \text{g.d.w.} \quad (\mathcal{A}(\beta)(s_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)) \in p_\mathcal{A} \\
\mathcal{A}(\beta)(s \approx t) &= 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(s) = \mathcal{A}(\beta)(t) \\[1em]
\mathcal{A}(\beta)(\neg F) &= 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0 \\
\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) &= \rho_b(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G)) \\
&\phantom{=} \text{mit } \rho_b \text{ die } \rho \text{ zugeordnete Boolesche Funktion}
\end{aligned}
$$

# Beispiel

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \qquad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ mit Gleichheit $\approx$ .

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_\mathcal{A}, *_\mathcal{A} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, & \{\leq, <_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;\;) \\
\qquad n_1 +_\mathcal{A} n_2 = n_1 + n_2 & \quad (n_1, n_2) \in \leq_\mathcal{A} \text{ iff } n_1 \leq n_2 \text{ in } \mathbb{N} \\
\qquad n_1 *_\mathcal{A} n_2 = n_1 \cdot n_2 & \quad (n_1, n_2) \in <_\mathcal{A} \text{ iff } n_1 < n_2 \text{ in } \mathbb{N} \\
\quad \mathsf{s}_\mathcal{A} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, & \text{gerade}_\mathcal{A}, \text{ungerade}_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}\} \\
\qquad \mathsf{s}(n) = n + 1 & \quad \text{gerade}_\mathcal{A} = \{0, 2, 4, \ldots, 2k \ldots\} \\
\quad 0_\mathcal{A} = 0 \in \mathbb{N}\} & \quad \text{ungerade}_\mathcal{A} = \{1, 3, 5, \ldots, 2k + 1 \ldots\},
\end{array}$$

**Konvention:** Auf den nächsten Folien wird der Unterschied zwischen den natürlichen Zahlen 0, 1 und den Wahrheitswerten 0 (falsch) und 1 (wahr) deutlich gemacht, indem wir die Wahrheitswerte in orangener Farbe schreiben.

**Nota Bene:**

- Der Wert eines Termes $t$ in $\mathcal{A}$ bzgl. $\beta$ ist ein Element in das Universum von $\mathcal{A}$.
- Der Wahrheitswert einer Formel $F$ in $\mathcal{A}$ bzgl. $\beta$ ist ein Wahrheitswert (0 oder 1).

# Beispiel

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \qquad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ mit Gleichheit $\approx$ .

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_\mathcal{A}, *_\mathcal{A} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad \{\leq, <_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ )$$

$$n_1 +_\mathcal{A} n_2 = n_1 + n_2 \qquad (n_1, n_2) \in \leq_\mathcal{A} \text{ iff } n_1 \leq n_2 \text{ in } \mathbb{N}$$

$$n_1 *_\mathcal{A} n_2 = n_1 \cdot n_2 \qquad (n_1, n_2) \in <_\mathcal{A} \text{ iff } n_1 < n_2 \text{ in } \mathbb{N}$$

$$\mathsf{s}_\mathcal{A} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad \text{gerade}_\mathcal{A}, \text{ungerade}_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}\}$$

$$\mathsf{s}(n) = n + 1 \qquad \text{gerade}_\mathcal{A} = \{0, 2, 4, \ldots, 2k \ldots\}$$

$$0_\mathcal{A} = 0 \in \mathbb{N}\} \qquad \text{ungerade}_\mathcal{A} = \{1, 3, 5, \ldots, 2k + 1 \ldots\},$$

$\beta : X \to \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 4$

| | |
|---|---|
| (1) $\mathcal{A}(\beta)(\text{gerade}(x)) = 0$ | Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x) = 1 \notin \text{gerade}_\mathcal{A}$ |
| (2) $\mathcal{A}(\beta))(s(s(x) + s(0)) \approx y) = 1$ | Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(s(s(x) + s(0))) = s_\mathcal{A}(s_\mathcal{A}(\beta(x)) +_\mathcal{A} s_\mathcal{A}(0_\mathcal{A}))$ $= ((1+1)+(0+1))+1 = 4$ <br> $\mathcal{A}(\beta)(y) = 4$ <br> und $4 = 4$ |
| (3) $\mathcal{A}(\beta))(x \approx y) = 0$ | Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(x) = 1; \quad \mathcal{A}(\beta)(y) = 4, \quad 1 \neq 4$ |

# Beispiel

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \qquad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ with equality $\approx$ .

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_\mathcal{A}, *_\mathcal{A} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad \{\leq, <_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;)$$

$$n_1 +_\mathcal{A} n_2 = n_1 + n_2 \qquad (n_1, n_2) \in \leq_\mathcal{A} \text{ iff } n_1 \leq n_2 \text{ in } \mathbb{N}$$

$$n_1 *_\mathcal{A} n_2 = n_1 \cdot n_2 \qquad (n_1, n_2) \in <_\mathcal{A} \text{ iff } n_1 < n_2 \text{ in } \mathbb{N}$$

$$\mathrm{s}_\mathcal{A} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad \text{gerade}_\mathcal{A}, \text{ungerade}_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}\}$$

$$\mathrm{s}(n) = n + 1 \qquad \text{gerade}_\mathcal{A} = \{0, 2, 4, \ldots, 2k \ldots\}$$

$$0_\mathcal{A} = 0 \in \mathbb{N}\} \qquad \text{ungerade}_\mathcal{A} = \{1, 3, 5, \ldots, 2k + 1 \ldots\},$$

$\beta : X \to \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 4$

(4) $\mathcal{A}(\beta)(\neg\text{gerade}(x)) = \neg_b \mathcal{A}(\beta)(\text{gerade}(x)) = \neg_b 0 = 1$

(5) $\mathcal{A}(\beta)(x \leq s(0) \vee \text{gerade}(x)) = \mathcal{A}(\beta)(x \leq s(0)) \vee_b \mathcal{A}(\beta)(\text{gerade}(x)) = 1 \vee_b 0 = 1$

Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(x \leq s(0)) = 1 : \mathcal{A}(\beta)(x) = 1, \mathcal{A}(s(0)) = s_\mathcal{A}(0_\mathcal{A}) = 0+1 = 1$, und $(1, 1) \in \leq_\mathcal{A}$.

(6) $\mathcal{A}(\beta)(y \leq s(0) \to \text{ungerade}(y)) = \mathcal{A}(\beta)(y \leq s(0)) \to_b \mathcal{A}(\beta)(\text{ungerade}(y)) = 0 \to_b 0 = 1$

Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(y \leq s(0)) = 0$, da $\beta(y) = 4, \beta(s(0)) = 1$ und $(4, 1) \notin \leq_\mathcal{A}$;
$\mathcal{A}(\beta)(\text{ungerade}(y)) = 0$ da $\beta(y) = 4 \notin \text{ungerade}_\mathcal{A}$.

# Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. $\beta$

$$\mathcal{A}(\beta)(\forall x F) = \min_{a \in U}\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F)\} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ für alle } a \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}(\beta)(\exists x F) = \max_{a \in U}\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F)\} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ für mindestens} \\ & \text{ein } a \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $x \in X$ und $a \in U$ bezeichne $\beta[x \mapsto a] : X \to U$ die Belegung, mit

$$\beta[x \mapsto a](y) := \begin{cases} a & \text{falls } x = y \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

# Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. $\beta$

$$\mathcal{A}(\beta)(\forall xF) = \min_{a \in U}\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F)\} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ für alle } a \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}(\beta)(\exists xF) = \max_{a \in U}\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F)\} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ für mindestens} \\ & \text{ein } a \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $x \in X$ und $a \in U$ bezeichne $\beta[x \mapsto a] : X \to U$ die Belegung, mit

$$\beta[x \mapsto a](y) := \begin{cases} a & \text{falls } x = y \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Intuition: $\forall$: verallgemeinerte Konjunktion ($\wedge_b$ ist minimum auf $\{0, 1\}$)

$\exists$: verallgemeinerte Disjunktion ($\vee_b$ ist maximum auf $\{0, 1\}$)

## Drei Logiker kommen in eine Bar

“Wollt ihr alle ein Bier?”, fragt die Kellnerin.

“Weiß ich nicht”, sagt der erste Logiker.

“Weiß ich nicht”, sagt der zweite Logiker.

“Ja!”, sagt der dritte Logiker.

# Erklärung des Witzes

Logiker 1 will ein Bier, aber er weiß nicht, was seine Begleiter wollen, deshalb kann er die Frage weder mit “ja” noch mit “nein” beantworten.

Logiker 2 kann aus der Antwort von Logiker 1 schließen, dass der Durst auf ein Bier hat. Denn wäre das nicht der Fall, dann könnte er die Frage mit “nein” beantworten

(ein Satz, der mit “Alle” beginnt, wird schon durch eine einzige Ausnahme falsch.)

Logiker 2 möchte auch gern ein Bier, aber weil er nichts über den Durst von Logiker 3 weiß, muss er auch mit “Weiß ich nicht” antworten.

Erst Logiker 3 kann eine definitive Antwort geben: Er weiß, dass seine beiden Begleiter ein Bier trinken möchten, er selber möchte auch eins - also antwortet er mit “Ja!”

# Beispiel

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \qquad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ with equality $\approx$ .

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_\mathcal{A}, *_\mathcal{A} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, & \{\leq, <_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;\; ) \\
\quad n_1 +_\mathcal{A} n_2 = n_1 + n_2 & \quad (n_1, n_2) \in \leq_\mathcal{A} \text{ iff } n_1 \leq n_2 \text{ in } \mathbb{N} \\
\quad n_1 *_\mathcal{A} n_2 = n_1 \cdot n_2 & \quad (n_1, n_2) \in <_\mathcal{A} \text{ iff } n_1 < n_2 \text{ in } \mathbb{N} \\
\quad \mathsf{s}_\mathcal{A} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, & \text{gerade}_\mathcal{A}, \text{ungerade}_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}\} \\
\quad \mathsf{s}(n) = n + 1 & \quad \text{gerade}_\mathcal{A} = \{0, 2, 4, \dots, 2k \dots\} \\
\quad 0_\mathcal{A} = 0 \in \mathbb{N}\} & \quad \text{ungerade}_\mathcal{A} = \{1, 3, 5, \dots, 2k + 1 \dots\},
\end{array}$$

$\beta : X \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 4$

(7) $\mathcal{A}(\beta)(\forall x \text{gerade}(x)) = \min_{a \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 0$

Erklärung:

Falls $a = 2k$ so $\beta[x \mapsto a](x) = a \in \text{gerade}_\mathcal{A}$. Dann $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 1$.
Falls $a = 2k + 1$ so $\beta[x \mapsto a](x) = a \notin \text{gerade}_\mathcal{A}$. Dann $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 0$.

Es gibt $a \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 0$.

$\min_{a \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = \min\{1, 0\} = 0$

# Beispiel

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \qquad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ with equality $\approx$ .

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_\mathcal{A}, *_\mathcal{A} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \qquad \{\leq, <_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;\;)$$

$$n_1 +_\mathcal{A} n_2 = n_1 + n_2 \qquad (n_1, n_2) \in \leq_\mathcal{A} \text{ iff } n_1 \leq n_2 \text{ in } \mathbb{N}$$

$$n_1 *_\mathcal{A} n_2 = n_1 \cdot n_2 \qquad (n_1, n_2) \in <_\mathcal{A} \text{ iff } n_1 < n_2 \text{ in } \mathbb{N}$$

$$\mathsf{s}_\mathcal{A} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \qquad \text{gerade}_\mathcal{A}, \text{ungerade}_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}\}$$

$$\mathsf{s}(n) = n + 1 \qquad \text{gerade}_\mathcal{A} = \{0, 2, 4, \dots, 2k \dots\}$$

$$0_\mathcal{A} = 0 \in \mathbb{N}\} \qquad \text{ungerade}_\mathcal{A} = \{1, 3, 5, \dots, 2k + 1 \dots\},$$

$\beta : X \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 4$

(8) $\mathcal{A}(\beta)(\exists x \text{gerade}(x)) = \max_{a \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 1$

Erklärung:
Falls $a = 2k$ so $\beta[x \mapsto a](x) = a \in \text{gerade}_\mathcal{A}$. Dann $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 1$.
Falls $a = 2k + 1$ so $\beta[x \mapsto a](x) = a \notin \text{gerade}_\mathcal{A}$. Dann $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 0$.

Es gibt $a \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 1$.

$$\max_{a \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = \max\{1, 0\} = 1$$

# Beispiel 2

$$U_{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$
$$0_{\mathbb{N}} = 0 \in U_{\mathbb{N}}$$
$$s_{\mathbb{N}} : U_{\mathbb{N}} \to U_{\mathbb{N}}, \ s_{\mathbb{N}}(n) = n + 1$$
$$+_{\mathbb{N}} : U_{\mathbb{N}}^2 \to U_{\mathbb{N}}, \quad +_{\mathbb{N}} (n, m) = n + m$$
$$*_{\mathbb{N}} : U_{\mathbb{N}}^2 \to U_{\mathbb{N}}, \quad *_{\mathbb{N}} (n, m) = n * m$$
$$\leq_{\mathbb{N}} = \text{ “kleiner-gleich” } \subseteq U_{\mathbb{N}}^2$$
$$<_{\mathbb{N}} = \text{ “kleiner” } \subseteq U_{\mathbb{N}}^2$$

Mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 3$ ergibt sich beispielsweise:

$$\begin{array}{lcl}
\mathbb{N}(\beta)(s(x) + s(0)) & = & 3 \\
\mathbb{N}(\beta)(x + y \approx s(y)) & = & 1 \\
\mathbb{N}(\beta)(\forall x, y(x + y \approx y + x)) & = & 1 \\
\mathbb{N}(\beta)(\forall z \ z \leq y) & = & 0 \\
\mathbb{N}(\beta)(\forall x \exists y \ x < y) & = & 1
\end{array}$$

# Beispiel 2

(1) $\mathbb{N}(\beta)(s(x) + s(0)) = s_{\mathbb{N}}(\beta(x)) +_{\mathbb{N}} s_{\mathbb{N}}(0_{\mathbb{N}}) = (1+1) + (0+1) = 3$

(2) $\mathbb{N}(\beta)(x + y \approx s(y)) = 1$

Erklärung:

$$\mathbb{N}(\beta)(x+y) = \beta(x) +_{\mathbb{N}} \beta(y) = 1 + 3 = 4$$
$$\mathbb{N}(\beta)(s(y)) = s_{\mathbb{N}}(\beta(y)) = 3 + 1 = 4.$$

(3)
$$\begin{aligned}
\mathbb{N}(\beta)(\forall x, y(x + y \approx y + x)) &= \min_{a\in\mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a])(\forall y(x + y \approx y + x)) \\
&= \min_{a\in\mathbb{N}} \min_{b\in\mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x + y \approx y + x) \\
&= \min_{a,b\in\mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x + y \approx y + x) \\
&= 1
\end{aligned}$$

da für alle $a, b \in \mathbb{N}$:
$\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x + y) = a + b = b + a = \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(y + x)$

# Beispiel 2

(4) $\mathbb{N}(\beta)(\forall z\ z \leq y) = \min_{a \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(z \leq y) = 0$

Erklärung:

Falls $a = 4$, so $\mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(z \leq y) = 0$, da:

$\mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(z) = a = 4$
$\mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(y) = \beta(y) = 3$
und $(4, 3) \notin \leq_{\mathbb{N}}$.

(5) $\mathbb{N}(\beta)(\forall x \exists y\ x < y) = \min_{a \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a])(\exists y\ x < y)$

$= \min_{a \in \mathbb{N}} \max_{b \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x < y) = 1$

Erklärung:

Für jede Zahl $a \in \mathbb{N}$: $\max_{b \in \mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x < y) = 1$,

da es gibt $b = a + 1 \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x < y) = 1$

weil $\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x) = a$

$\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(y) = b = a + 1$ und $(a, a + 1) \in <_{\mathbb{N}}$.