Logik für Informatiker

3. Prädikatenlogik

Teil 9

12.07.2016

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Organisatorisches

Hauptklausur: Freitag, 29.07.2016, D028, 13:00s.t.-15:00 (120 min)

Anmeldung: Bis 26.07.2016
Abmeldung: Bis 29.07.2016, 12:55

Question/Answer Session: Donnerstag, 21.07.2016, in der Vorlesung.

Bis jetzt

Syntax Semantik

Unentscheidbarkeit der Erfüllbarkeit von Formeln

Normalformen

- NNF
- Pränexe Normalform
- Skolemnormalform
- Klauselnormalform

Kalküle

- Resolution
- Semantische Tableaux

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (1)

Gegeben die Formel F:

$$
\begin{aligned}
&(\forall x \forall y (p(x,y) \to q(x,y)) \land \\
&\ \forall x \forall y (r(x,y) \to s(x,y)) \\
&) \to \\
&(\forall x \forall y ((\exists z (p(x,z) \land r(z,y))) \to \\
&\qquad\qquad (\exists z (q(x,z) \land s(z,y))))) \\
&)
\end{aligned}
$$

Gezeigt werden soll die Allgemeingültigkeit von F mittels Resolution

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (2)

Dazu zeigen wir die Unerfüllbarkeit von $\neg F$:

$$
\begin{aligned}
\neg((&\forall x \forall y (p(x,y) \to q(x,y)) \land \\
&\forall x \forall y (r(x,y) \to s(x,y)) \\
&) \to \\
&(\forall x \forall y ((\exists z (p(x,z) \land r(z,y))) \to \\
&\qquad\qquad (\exists z (q(x,z) \land s(z,y)))) \\
&))
\end{aligned}
$$

Diese Formel muss zunächst in Klauselnormalform transformiert werden

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (3)

Elimination der Implikationen:

$$
\begin{array}{l}
\neg(\neg(\forall x \forall y(\neg p(x,y) \vee q(x,y)) \wedge \\
\quad \forall x \forall y(\neg r(x,y) \vee s(x,y)) \\
\quad) \quad \vee \\
\quad (\forall x \forall y(\neg(\exists z(p(x,z) \wedge r(z,y))) \vee \\
\qquad\qquad (\exists z(q(x,z) \wedge s(z,y)))) \\
\quad))
\end{array}
$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (4)

Äußere Negation nach innen schieben:

$$
\begin{array}{l}
((\forall x \forall y(\neg p(x,y) \vee q(x,y)) \wedge \\
\quad \forall x \forall y(\neg r(x,y) \vee s(x,y)) \\
\ \ ) \quad \wedge \\
\neg(\forall x \forall y(\neg(\exists z(p(x,z) \wedge r(z,y))) \vee \\
\qquad\qquad\qquad \exists z(q(x,z) \wedge s(z,y))) \\
))
\end{array}
$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (5)

Negation an den Allquantoren vorbei:

$$
\begin{array}{l}
((\forall x \forall y(\neg p(x,y) \vee q(x,y)) \wedge \\
\quad \forall x \forall y(\neg r(x,y) \vee s(x,y)) \\
\quad) \quad \wedge \\
(\exists x \exists y \neg(\neg(\exists z(p(x,z) \wedge r(z,y))) \vee \\
\qquad\qquad\qquad \exists z(q(x,z) \wedge s(z,y))) \\
))
\end{array}
$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (6)

De Morgan:

$$
\begin{array}{l}
((\forall x \forall y(\neg p(x,y) \lor q(x,y)) \land \\
\quad \forall x \forall y(\neg r(x,y) \lor s(x,y)) \\
\quad) \;\; \land \\
\;(\exists x \exists y((\exists z(p(x,z) \land r(z,y))) \land \\
\qquad\qquad \neg \exists z(q(x,z) \land s(z,y))) \\
))
\end{array}
$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (7)

Negation am Quantor vorbei:

$$
\begin{aligned}
&((\forall x \forall y(\neg p(x,y) \vee q(x,y)) \wedge \\
&\quad \forall x \forall y(\neg r(x,y) \vee s(x,y)) \\
&\quad) \ \ \wedge \\
&\ (\exists x \exists y((\exists z(p(x,z) \wedge r(z,y))) \wedge \\
&\qquad\qquad \forall z \neg(q(x,z) \wedge s(z,y))) \\
&))
\end{aligned}
$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (8)

De Morgan

$$
\begin{aligned}
&((\forall x \forall y(\neg p(x,y) \vee q(x,y)) \wedge \\
&\quad \forall x \forall y(\neg r(x,y) \vee s(x,y)) \\
&\quad) \;\; \wedge \\
&\ (\exists x \exists y((\exists z(p(x,z) \wedge r(z,y))) \wedge \\
&\qquad\qquad \forall z(\neg q(x,z) \vee \neg s(z,y))) \\
&))
\end{aligned}
$$

Nun ist die Formel in Negationsnormalform

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (9)

Bereinigen der Formel führt zu:

$$
\begin{array}{l}
((\forall x\, \forall y\, (\neg p(x, y) \vee q(x, y)) \wedge \\
\quad \forall x' \forall y' (\neg r(x', y') \vee s(x', y')) \\
\quad) \ \wedge \\
\ (\exists x'' \exists y'' ((\exists z (p(x'', z) \wedge r(z, y''))) \wedge \\
\qquad\qquad\qquad \forall z' (\neg q(x'', z') \vee \neg s(z', y''))) \\
))
\end{array}
$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (10)

Da die Formel bereinigt und in NNF ist, kann man alle Quantoren nach vorne ziehen:

$$
\begin{aligned}
&\forall x \forall y \forall x' \forall y' \exists x'' \exists y'' \exists z \forall z' (\\
&(\neg p(x,y) \vee q(x,y)) \wedge \\
&(\neg r(x',y') \vee s(x',y')) \\
&p(x'',z) \wedge \\
&r(z,y'') \wedge \\
&(\neg q(x'',z') \vee \neg s(z',y'')) \\
&)
\end{aligned}
$$

Nun ist die Formel in Pränexnormalform, die Matrix der Formel ist auch schon in konjunktiver Normalform

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (11)

Skolemisieren:

$$x'' \mapsto f(x, y, x', y'), \quad y'' \mapsto g(x, y, x', y'), \quad z \mapsto h(x, y, x', y')$$

$$\begin{array}{l}
\forall x \forall y \forall x' \forall y' \forall z' (\\
(\neg p(x, y) \vee q(x, y)) \wedge \\
(\neg r(x', y') \vee s(x', y')) \\
p(f(x, y, x', y'), h(x, y, x', y')) \wedge \\
r(h(x, y, x', y'), g(x, y, x', y')) \wedge \\
(\neg q(f(x, y, x', y'), z') \vee \neg s(z', g(x, y, x', y'))) \\
)
\end{array}$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (13)

In Klauselmengenschreibweise:

1. $\{\neg p(x, y), q(x, y)\}$
2. $\{\neg r(x', y'), s(x', y')\}$
3. $\{p(f(x, y, x', y'), h(x, y, x', y'))\}$
4. $\{r(h(x, y, x', y'), g(x, y, x', y'))\}$
5. $\{\neg q(f(x, y, x', y'), z'), \neg s(z', g(x, y, x', y'))\}$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (14)

1. $\{\neg p(x, y), q(x, y)\}$
2. $\{\neg r(x', y'), s(x', y')\}$
3. $\{p(f(x, y, x', y'), h(x, y, x', y'))\}$
4. $\{r(h(x, y, x', y'), g(x, y, x', y'))\}$
5. $\{\neg q(f(x, y, x', y'), z'), \neg s(z', g(x, y, x', y'))\}$

Resolution der Klauseln 1. und 3. Dazu zunächst Umbenennung der Variablen x, y in 3., um die Klauseln variablendisjunkt zu machen

$$\frac{1 : \{\neg p(x, y), q(x, y)\} \qquad 3' : \{p(f(u, v, x', y'), h(u, v, x', y'))\}}{6 : \ \{q(f(u, v, x', y'), h(u, v, x', y'))\}}$$

Verwendeter MGU: $[f(u, v, x', y')/x, h(u, v, x', y')/y]$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (15)

1. $\{\neg p(x, y), q(x, y)\}$
2. $\{\neg r(x', y'), s(x', y')\}$
3. $\{p(f(x, y, x', y'), h(x, y, x', y'))\}$
4. $\{r(h(x, y, x', y'), g(x, y, x', y'))\}$
5. $\{\neg q(f(x, y, x', y'), z'), \neg s(z', g(x, y, x', y'))\}$
6. $\{q(f(u, v, x', y'), h(u, v, x', y'))\}$

Resolution der Klauseln 2 und 4. Dazu zunächst Umbenennung der Variablen x', y' in 4, um die Klauseln variablendisjunkt zu machen

$$\frac{2:\ \{\neg r(x', y'), s(x', y')\} \qquad 4':\ \{r(h(x, y, u, v), g(x, y, u, v))\}}{7:\ \{s(h(x, y, u, v), g(x, y, u, v))\}}$$

Verwendeter MGU: $[h(x, y, u, v)/x', g(x, y, u, v)/y']$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (16)

1. $\{\neg p(x, y), q(x, y)\}$
2. $\{\neg r(x', y'), s(x', y')\}$
3. $\{p(f(x, y, x', y'), h(x, y, x', y'))\}$
4. $\{r(h(x, y, x', y'), g(x, y, x', y'))\}$
5. $\{\neg q(f(x, y, x', y'), z'), \neg s(z', g(x, y, x', y'))\}$
6. $\{q(f(u, v, x', y'), h(u, v, x', y')\}$
7. $\{s(h(x, y, u, v), g(x, y, u, v))\}$

Resolution der Klauseln 5 und 6. Dazu zunächst Umbenennung der Variablen x', y' in 6, um die Klauseln variablendisjunkt zu machen.

$$\frac{5: \ \{\neg q(f(x, y, x', y'), z'), \neg s(z', g(x, y, x', y'))\} \quad 6: \ \{q(f(u, v, u', v'), h(u, v, u', v')\}}{8: \ \{\neg s(h(u, v, u', v'), g(u, v, u', v'))\}}$$

Verwendeter MGU: $[u/x, v/y, u'/x', v'/y', h(u, v, u', v')/z']$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (17)

1. $\{\neg p(x, y), q(x, y)\}$
2. $\{\neg r(x', y'), s(x', y')\}$
3. $\{p(f(x, y, x', y'), h(x, y, x', y'))\}$
4. $\{r(h(x, y, x', y'), g(x, y, x', y'))\}$
5. $\{\neg q(f(x, y, x', y'), z'), \neg s(z', g(x, y, x', y'))\}$
6. $\{q(f(u, v, x', y'), h(u, v, x', y'))\}$
7. $\{s(h(x, y, u, v), g(x, y, u, v))\}$
8. $\{\neg s(h(u, v, u', v'), g(u, v, u', v'))\}$

Resolution der Klauseln 7 und 8. Dazu zunächst Umbenennung der Variablen u, v in 8, um die Klauseln variablendisjunkt zu machen.

$$\frac{7: \ \{s(h(x, y, u, v), g(x, y, u, v))\} \qquad 8': \ \{\neg s(h(u'', v'', u', v'), g(u'', v'', u', v'))\}}{\perp}$$

Verwendeter MGU: $[u''/x, v''/y, u'/u, v'/v]$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (18)

Damit ist die leere Klausel $\perp$ abgeleitet,

also ist die Klauselmenge unerfüllbar, (Korrektheit des Resolutionskalküls)

also ist die Formel $\neg F$ unerfüllbar,

also ist die Formel F allgemeingültig

Prädikatenlogische Resolution

- Zu zeigen: F (un)erfüllbar

  Pränexnormalform, Skolemnormalform, KNF, Resolution

  Falls $\perp$ hergeleitet werden kann: F unerfüllbar

- Zu zeigen: F allgemeingültig

  Zeige, dass $\neg F$ unerfüllbar ist.

- Zu zeigen: $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models F$

  Zeige, dass $F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \neg F$ unerfüllbar ist.

Verbindung mit Prolog

```
gerade([]).
gerade([_|Tail]):- ungerade(Tail).
ungerade([_|Tail]):- gerade(Tail).

ungerade([a,b,c]).
```

Verbindung mit Prolog

```
gerade([]).
gerade([_|Tail]):- ungerade(Tail).
ungerade([_|Tail]):- gerade(Tail).

ungerade([a,b,c]).
```

$$\begin{aligned} N := \quad & \{\mathrm{gerade}(nil), \\ & \forall x, y(\mathrm{ungerade}(y) \to \mathrm{gerade}(\mathrm{list}(x, y))) \\ & \forall x, y(\mathrm{gerade}(y) \to \mathrm{ungerade}(\mathrm{list}(x, y))) \end{aligned}$$

$$N \models \mathrm{ungerade}(\mathrm{list}(a, \mathrm{list}(b, \mathrm{list}(c, nil))))$$

Verbindung mit Prolog

$$
\begin{aligned}
N := \quad & \{\text{gerade}(nil), \\
& \forall x, y(\text{ungerade}(y) \to \text{gerade}(\text{list}(x, y))) \\
& \forall x, y(\text{gerade}(y) \to \text{ungerade}(\text{list}(x, y)))
\end{aligned}
$$

$N \models \text{ungerade}(\text{list}(a, \text{list}(b, \text{list}(c, nil))))$

gdw.

$N \cup \neg\text{ungerade}(\text{list}(a, \text{list}(b, \text{list}(c, nil))))$

$$\frac{\neg\text{ungerade}(\text{list}(a,\text{list}(b,\text{list}(c,nil)))) \qquad \neg\text{gerade}(y) \vee \text{ungerade}(\text{list}(x,y))}{\neg\text{gerade}(\text{list}(b,\text{list}(c,nil)))} \qquad MGU: \quad [a/x, \text{list}(b, \text{list}(c, nil))/y]$$

$$\frac{\neg\text{gerade}(\text{list}(b,\text{list}(c,nil))) \qquad \neg\text{ungerade}(y) \vee \text{gerade}(\text{list}(x,y))}{\neg\text{ungerade}(\text{list}(c,nil))} \qquad MGU: \quad [b/x, \text{list}(c, nil)/y]$$

$$\frac{\neg\text{ungerade}(\text{list}(c,nil)) \qquad \neg\text{gerade}(y) \vee \text{ungerade}(\text{list}(x,y))}{\neg\text{gerade}(nil)} \qquad MGU: \quad [c/x, nil/y]$$

$$\frac{\neg\text{gerade}(nil) \qquad \text{gerade}(nil)}{\perp}$$

Verbindung mit Prolog

$N := \{\text{gerade}(\textit{nil}),\ \text{ungerade}(y) \to \text{gerade}(\text{list}(x, y)),\ \text{gerade}(y) \to \text{ungerade}(\text{list}(x, y))$

$N \models \text{ungerade}(\text{list}(a, \text{list}(b, \text{list}(c, \textit{nil}))))$

ungerade(list(a, list(b, list(c, $\textit{nil}$))))

- unifizierbar mit dem Kopf der Regel gerade(y) $\to$ ungerade(list(x, y));
  MGU: $[x/a, \text{list}(b, \text{list}(c, \textit{nil}))/y]$
- ist beweisbar, wenn $\text{gerade}(y)[a/x, \text{list}(b, \text{list}(c, \textit{nil}))/y] = \text{gerade}(\text{list}(b, \text{list}(c, \textit{nil})))$ beweisbar ist.

gerade(list(b, list(c, $\textit{nil}$)))

- unifizierbar mit dom Kopf der Regel ungerade(y) $\to$ gerade(list(x, y))
  MGU: $[b/x, \text{list}(c, \textit{nil})/y]$.
- ist beweisbar, wenn $\text{ungerade}(y)[b/x, \text{list}(c, \textit{nil})/y] = \text{ungerade}(\text{list}(c, \textit{nil}))$ beweisbar ist.

ungerade(list(c, $\textit{nil}$))

- unifizierbar mit dem Kopf der Regel gerade(y) $\to$ ungerade(list(x, y));
  MGU: $[c/x, \textit{nil}/y]$
- ist beweisbar, wenn$\text{gerade}(y)[c/x, \textit{nil}/y] = \text{gerade}(\textit{nil})$ beweisbar ist.

gerade($\textit{nil}$) ist mit dem Fakt gerade($\textit{nil}$) unifizierbar, ist also bewiesen.

Verbindung mit Prolog

Anfragen

- Eine Anfrage bedeutet, dass das Ziel, das durch die Anfrage repräsentiert wird, bewiesen werden muss. Dies durch das Programm, das momentan in der Wissensbasis ist.

Prinzip

- Abarbeitung einer Anfrage geht von der Anfrage selbst aus.
- Anfrage wird mit Hilfe von Klauseln auf einfachere Aussagen vereinfacht, bis diese "Fakten" des Prolog-Programms sind.

Abarbeitungsregeln

- Wenn ein Ziel mit einem Fakt unifizierbar ist, ist es bewiesen.
- Wenn ein Ziel mit dem Kopf einer Regel unifizierbar ist, dann ist es bewiesen, wenn der Rumpf der Regel bewiesen ist.
- Wenn ein Ziel aus mehreren durch Kommata getrennte Teilzielen besteht, ist es bewiesen, falls alle Teilziele bewiesen sind.

Zusammenfassung: Prädikatenlogische Resolution

- Prädikatenlogische Resolutionsregel
- Faktorisierung
- Kombination von Resolution und Faktorisierung
- Häufige Fehlerquellen
- Korrektheit und Vollständigkeit
- Beispiel

Kalküle

- Resolution
- Semantische Tableaux

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Beweis durch Fallunterscheidung
- Top-down-Analyse der gegebenen Formeln

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Vorteile

- Intuitiver als Resolution
- Formeln müssen nicht in Normalform sein
- Falls Formelmenge erfüllbar ist (Test schlägt fehl), wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

Nachteile

- Mehr als eine Regel

Formeltypen

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg F$
- $F \wedge G$
- $\neg(F \vee G)$
- $\neg(F \rightarrow G)$

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

α	α_1	α_2
$F \wedge G$	F	G
$\neg(F \vee G)$	$\neg F$	$\neg G$
$\neg(F \rightarrow G)$	F	$\neg G$
$\neg\neg F$	F	

Formeltypen

Disjunktive Formeln: Typ β

- $\neg(F \wedge G)$
- $F \vee G$
- $F \rightarrow G$

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

β	β_1	β_2
$\neg(F \wedge G)$	$\neg F$	$\neg G$
$F \vee G$	F	G
$F \rightarrow G$	$\neg F$	G

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$

Konjunktiv

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ | \\ p \\ | \\ q \end{array}$$

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

Disjunktiv

$$\begin{array}{ccc} & p \vee q & \\ / & & \backslash \\ p & & q \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\phi\\ \neg\phi\end{array}}{\bot}$$

Widerspruch

$$\begin{array}{c} \phi \\ \neg\phi \\ | \\ \bot \end{array}$$

Instanzen der α und β-Regel

Instanzen der α-Regel

$$\frac{P \land Q}{\begin{matrix} P \\ Q \end{matrix}} \qquad \frac{\neg(P \lor Q)}{\begin{matrix} \neg P \\ \neg Q \end{matrix}} \qquad \frac{\neg(P \to Q)}{\begin{matrix} P \\ \neg Q \end{matrix}} \qquad \frac{\neg\neg P}{P}$$

Instanzen der β-Regel

$$\frac{P \lor Q}{P \mid Q} \qquad \frac{\neg(P \land Q)}{\neg P \mid \neg Q} \qquad \frac{P \to Q}{\neg P \mid Q}$$

Zusätzlich: Prädikatenlogische Formeltypen

universell		existentiell	
γ	$\gamma(t)$	δ	$\delta(t)$
$\forall x F$	$F[t/x]$	$\exists x F$	$F[t/x]$
$\neg\exists x F$	$\neg F[t/x]$	$\neg\forall x F$	$\neg F[t/x]$

Zusätzlich: Prädikatenlogische Tableauregeln

γ-Regel

$\dfrac{\gamma}{\gamma(t)}$ universell

$$\begin{array}{c} \forall x q(x) \\ | \\ q(t) \end{array}$$

wobei t ein beliebiger Term ist.

δ-Regel

$\dfrac{\delta}{\delta(f(y_1,\ldots,y_n))}$ existentiell

$$\begin{array}{c} \exists x p(x, y_1, \ldots, y_n) \\ | \\ p(f(y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n) \end{array}$$

wobei f eine *neue* Skolemfunktion ist, und $y_1, \ldots, y_n$ die freien Variablen in δ sind.

Skolemisierung ist also ein Bestandteil des Kalküls und wird nicht als ein Vorverarbeitungsschritt vorausgesetzt. Aber natürlich könnte man ebensogut vorher Skolemisieren, was auch Vorteile haben kann.

Instanzen der γ und δ-Regel

Instanzen der γ-Regel

$$\frac{\forall x F(x)}{F(t)} \qquad\qquad \frac{\neg\exists x F(x)}{\neg F(t)}$$

Instanzen der γ und δ-Regel

Instanzen der γ-Regel

$$\frac{\forall x F(x)}{F(t)} \qquad \frac{\neg\exists x F(x)}{\neg F(t)}$$

Instanzen der δ-Regel

$$\frac{\exists x F(x, y_1, \ldots, y_n)}{F(f(y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n)} \qquad \frac{\neg\forall x F(x, y_1, \ldots, y_n)}{\neg F(f(y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n)}$$

wobei f eine *neue* Skolemfunktion ist und $y_1, \ldots, y_n$ die freien Variablen in $\exists x F(x, y_1, \ldots, y_n)$ (resp. $\forall x F(x, y_1, \ldots, y_n)$) sind.

Determinismus der Regeln

α- und β-Regeln

deterministisch (wie in Aussagenlogik)

Determinismus der Regeln

α- und β-Regeln

deterministisch (wie in Aussagenlogik)

γ-Regel

- hochgradig nicht-deterministisch
- muss für Vollständigkeit mehrfach angewendet werden (pro Ast)
- Grund für Nicht-Terminierung

Determinismus der Regeln

α- und β-Regeln

deterministisch (wie in Aussagenlogik)

γ-Regel

- hochgradig nicht-deterministisch
- muss für Vollständigkeit mehrfach angewendet werden (pro Ast)
- Grund für Nicht-Terminierung

δ-Regel

- nicht-deterministisch
- muss dennoch nur einmal pro Ast und Formel angewendet werden

Beispiel

1. $\neg[\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w)) \rightarrow \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)]$

Beispiel

1. $\neg[\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w)) \rightarrow \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)]$
2. $\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w))$ $\quad 1_1 \; [\alpha]$
3. $\neg \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)$ $\quad 1_2 \; [\alpha]$

Beispiel

1.	$\neg[\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w)) \rightarrow \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)]$	
2.	$\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w))$	1_1 $[\alpha]$
3.	$\neg \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)$	1_2 $[\alpha]$
4.	$\forall x \; p(x, a, f(x, a))$	$2(a)$ $[\delta]$
5.	$\neg \forall x \exists y \; p(x, a, y)$	$3(a)$ $[\gamma]$

Question: How to choose the terms in the γ-rule?

Beispiel

1.	$\neg[\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w)) \to \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)]$	
2.	$\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w))$	1_1 $[\alpha]$
3.	$\neg \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)$	1_2 $[\alpha]$
4.	$\forall x \; p(x, a, f(x, a))$	$2(a)$ $[\delta]$
5.	$\neg \forall x \exists y \; p(x, a, y)$	$3(a)$ $[\gamma]$
6.	$\neg \exists y \; p(b, a, y)$	$5(b)$ $[\delta]$

Question: How to choose the terms in the γ-rule?

Beispiel

1.	$\neg[\exists w \forall x\ p(x, w, f(x, w)) \rightarrow \exists w \forall x \exists y\ p(x, w, y)]$	
2.	$\exists w \forall x\ p(x, w, f(x, w))$	1_1 $[\alpha]$
3.	$\neg \exists w \forall x \exists y\ p(x, w, y)$	1_2 $[\alpha]$
4.	$\forall x\ p(x, a, f(x, a))$	$2(a)$ $[\delta]$
5.	$\neg \forall x \exists y\ p(x, a, y)$	$3(a)$ $[\gamma]$
6.	$\neg \exists y\ p(b, a, y)$	$5(b)$ $[\delta]$
7.	$p(b, a, f(b, a))$	$4(b)$ $[\gamma]$
8.	$\neg p(b, a, f(b, a))$	$6(f(b, a))$ $[\gamma]$

closed

Question: How to choose the terms in the γ-rule?

Beispiel

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, $\Omega = \{f/1\}$, $\Pi = \{p/2,\ q/1\}$, X eine Menge von Variablen und $x, y \in X$.

Sei F die folgende prädikatenlogische Formel in der Signatur Σ:

$$\Big(\ \exists x\ \forall y \big(p(x,y) \land q(x)\big)\Big)\ \land\ \Big(\neg\big(\exists x \big(p(x, f(x))\big) \land \exists x\ q(x)\big)\ \Big)$$

Zu zeigen: F unerfüllbar

Beispiel

1. $\Big(\exists x\, \forall y \big(p(x,y) \wedge q(x) \big) \Big) \;\wedge\; \Big(\neg \big(\exists x \big(p(x, f(x)) \big) \wedge \exists x\, q(x) \big) \Big)$

Beispiel

1. $\Big(\exists x\ \forall y \big(p(x,y) \land q(x) \big) \Big) \ \land \ \Big(\neg \big(\exists x \big(p(x, f(x)) \big) \land \exists x\ q(x) \big) \Big)$
2. $\exists x\ \forall y \big(p(x,y) \land q(x) \big) \Big)$ $[1_1, \alpha]$
3. $\neg \big(\exists x \big(p(x, f(x)) \big) \land \exists x\ q(x) \big)$ $[1_2, \alpha]$

Beispiel

1. $\Big(\exists x\, \forall y \big(p(x,y) \wedge q(x) \big) \Big) \;\wedge\; \Big(\neg \big(\exists x\, (p(x, f(x))) \wedge \exists x\; q(x) \big) \Big)$
2. $\exists x\, \forall y \big(p(x,y) \wedge q(x) \big) \Big)$ $[1_1, \alpha]$
3. $\neg \big(\exists x\, (p(x, f(x))) \wedge \exists x\; q(x) \big)$ $[1_2, \alpha]$
4. $\forall y \big(p(sk_x, y) \wedge q(sk_x) \big) \Big)$ $[2, \delta]$

Beispiel

1. $\Big(\exists x\ \forall y \big(p(x,y) \wedge q(x)\big)\Big) \ \wedge\ \Big(\neg\big(\exists x\,(p(x,f(x))) \wedge \exists x\ q(x)\big)\ \Big)$
2. $\exists x\ \forall y \Big(p(x,y) \wedge q(x)\Big)\Big)$ $[1_1, \alpha]$
3. $\neg\Big(\exists x\,(p(x,f(x))) \wedge \exists x\ q(x)\Big)$ $[1_2, \alpha]$
4. $\forall y \Big(p(sk_x, y) \wedge q(sk_x)\Big)\Big)$ $[2, \delta]$

/ \

5. $\neg\exists x\,\big(p(x,f(x))\big)[3_1, \beta]$

6.$\neg\exists x q(x)[3_2, \beta]$

Beispiel

1. $\Big(\exists x\ \forall y \big(p(x,y) \wedge q(x)\big)\Big) \ \wedge \ \Big(\neg\big(\exists x\,(p(x,f(x))) \wedge \exists x\ q(x)\big)\ \Big)$
2. $\exists x\ \forall y \big(p(x,y) \wedge q(x)\big)\Big)$ $[1_1, \alpha]$
3. $\neg\big(\exists x\,(p(x,f(x))) \wedge \exists x\ q(x)\big)$ $[1_2, \alpha]$
4. $\forall y \big(p(sk_x, y) \wedge q(sk_x)\big)\Big)$ $[2, \delta]$

/ \

5. $\neg\exists x\,(p(x,f(x)))\,[3_1, \beta]$

7. $\neg p(sk_x, f(sk_x))$ $[5, \gamma]$

6. $\neg\exists x q(x)[3_2, \beta]$

11. $\neg q(sk_x)$ $[6, \gamma]$

Beispiel

1. $\Big(\exists x\, \forall y \big(p(x,y) \wedge q(x)\big)\Big) \;\wedge\; \Big(\neg\big(\exists x (p(x, f(x))) \wedge \exists x\, q(x)\big)\Big)$
2. $\exists x\, \forall y \big(p(x,y) \wedge q(x)\big)$ $[1_1, \alpha]$
3. $\neg\big(\exists x (p(x, f(x))) \wedge \exists x\, q(x)\big)$ $[1_2, \alpha]$
4. $\forall y \big(p(sk_x, y) \wedge q(sk_x)\big)$ $[2, \delta]$

$/$ $\qquad\qquad$ $\backslash$

5. $\neg\exists x \big(p(x, f(x))\big)$	$[3_1, \beta]$	6. $\neg\exists x q(x)$	$[3_2, \beta]$
7. $\neg p(sk_x, f(sk_x))$	$[5, \gamma]$	11. $\neg q(sk_x)$	$[6, \gamma]$
8. $p(sk_x, f(sk_x)) \wedge q(sk_x)$	$[4, \gamma]$	12. $p(sk_x, f(sk_x)) \wedge q(sk_x)$	$[4, \gamma]$

Beispiel

1. $\Big(\exists x\, \forall y \big(p(x,y) \wedge q(x)\big)\Big) \;\wedge\; \Big(\neg\big(\exists x\, (p(x, f(x))) \wedge \exists x\; q(x)\big)\Big)$

2. $\exists x\, \forall y \big(p(x,y) \wedge q(x)\big)\Big)$ $[1_1, \alpha]$

3. $\neg\big(\exists x\, (p(x, f(x))) \wedge \exists x\; q(x)\big)$ $[1_2, \alpha]$

4. $\forall y \big(p(sk_x, y) \wedge q(sk_x)\big)\Big)$ $[2, \delta]$

/ \

5. $\neg\exists x\, (p(x, f(x)))$	$[3_1, \beta]$	6. $\neg\exists x q(x)$	$[3_2, \beta]$
7. $\neg p(sk_x, f(sk_x))$	$[5, \gamma]$	11. $\neg q(sk_x)$	$[6, \gamma]$
8. $p(sk_x, f(sk_x)) \wedge q(sk_x)$	$[4, \gamma]$	12. $p(sk_x, f(sk_x)) \wedge q(sk_x)$	$[4, \gamma]$
9. $p(sk_x, f(sk_x))$	$[8_1, \alpha]$	13. $p(sk_x, f(sk_x))$	$[12_1, \alpha]$
10. $q(sk_x)$	$[8_2, \alpha]$	14. $q(sk_x)$	$[12_2, \alpha]$

Beispiel

$$1.\quad \Big(\ \exists x\ \forall y \big(p(x,y) \land q(x)\big)\Big)\ \land\ \Big(\neg\big(\exists x\,(p(x,f(x))) \land \exists x\ q(x)\big)\ \Big)$$

$$2.\quad \exists x\ \forall y \big(p(x,y) \land q(x)\big)\Big) \qquad [1_1, \alpha]$$

$$3.\quad \neg\big(\exists x\,(p(x,f(x))) \land \exists x\ q(x)\big) \qquad [1_2, \alpha]$$

$$4.\quad \forall y \big(p(sk_x, y) \land q(sk_x)\big)\Big) \qquad [2, \delta]$$

/ \

5. $\neg\exists x\,(p(x,f(x)))$	$[3_1, \beta]$	6. $\neg\exists x q(x)$	$[3_2, \beta]$
7. $\neg p(sk_x, f(sk_x))$	$[5, \gamma]$	11. $\neg q(sk_x)$	$[6, \gamma]$
8. $p(sk_x, f(sk_x)) \land q(sk_x)$	$[4, \gamma]$	12. $p(sk_x, f(sk_x)) \land q(sk_x)$	$[4, \gamma]$
9. $p(sk_x, f(sk_x))$	$[8_1, \alpha]$	13. $p(sk_x, f(sk_x))$	$[12_1, \alpha]$
10. $q(sk_x)$	$[8_2, \alpha]$	14. $q(sk_x)$	$[12_2, \alpha]$
$\perp$		$\perp$	

Formale Definition des Kalküls

Fast wie in der Aussagenlogik definiert (kleine Änderungen)

(Definition auf den folgenden Seiten).

Formale Definition des Kalküls

Definition

Tableau: Binärer Baum, dessen Knoten mit Formeln markiert sind

Definition

Tableauast: Maximaler Pfad in einem Tableau (von Wurzel zu Blatt)

Definition: Tableau (mit freien Variablen)

Sei $M = \{F_1, \ldots, F_n\}$ eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- T ein Tableau für M
- B ein Ast von T
- F eine Formel auf B oder in M, die kein Literal ist
- T' entstehe durch Erweiterung von B gemäßder auf F anwendbaren Regel (α, β, γ oder δ)

Dann ist T' ein Tableau für M.

Substitutionsregel

- Ist T ein Tableau für M und
- ist σ eine Substitution,

so ist auch $T\sigma$ ein Tableau für M.

Formale Definition des Kalküls

Nota bene:

Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M

Definition.
Ast B eines Tableaus für M ist geschlossen, wenn

$$F, \neg F \in B$$

Definition.
Ein Tableau ist geschlossen, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist.

Definition.
Ein Tableau für M, das geschlossen ist, ist ein Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M

Bemerkungen

Nota bene:

Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M

Die Substitutionsregel ändert potentiell alle Formeln des Tableau.
Das ist das Globale an der Beweismethode.

Nimmt man die Substitutionsregel wörtlich, so zählt man, in Verbindung mit der γ-Regel, alle Substitutionsinstanzen allquantifizierter Formeln auf, ein Rückschritt im Vergleich zur Resolution.
Das braucht man aber nicht.

Beispiel

1. $\neg[\exists w \forall x\ p(x, w, f(x, w)) \to \exists w \forall x \exists y\ p(x, w, y)]$
2. $\exists w \forall x\ p(x, w, f(x, w))$ $\qquad 1_1\ [\alpha]$
3. $\neg \exists w \forall x \exists y\ p(x, w, y)$ $\qquad 1_2\ [\alpha]$
4. $\forall x\ p(x, a, f(x, a))$ $\qquad 2(a)\ [\delta]$
5. $\neg \forall x \exists y\ p(x, a, y)$ $\qquad 3(a)\ [\gamma]$
6. $\neg \exists y\ p(b, a, y)$ $\qquad 5(b)\ [\delta]$
7. $p(b, a, f(b, a))$ $\qquad 4(b)\ [\gamma]$
8. $\neg p(b, a, f(b, a))$ $\qquad 6(f(b, a))\ [\gamma]$

closed

Question: How to choose the terms in the γ-rule?

Formale Definition des Kalküls

Problem: Es ist sehr schwierig, zu “raten”, welche Instanzen im Beweis nützlich sind.

Idee:

- Substitutionsregel auf Unifikatoren komplementärer Formeln beschränken!
- γ-Regel führen nur freien Variablen ein (Tableaus mit freien Variablen)

  Freie Variablen (Dummies, Platzhalten) werden ’bei Bedarf’ (bei Abschluss) instantiiert (wie bei Resolution).

Wir sprechen von einem AMGU-Tableau, wenn die Substitutionsregel nur für Substitutionen σ angewendet wird, für die es einen Pfad in T mit *Literalen* $\neg A$ und B gibt, so daß $\sigma = \text{mgu}(A, B)$.

Beispiel

1. $\neg[\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w)) \rightarrow \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)]$

Beispiel

1. $\neg[\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w)) \rightarrow \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)]$
2. $\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w))$ $[1_1, \alpha]$
3. $\neg \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)$ $[1_2, \alpha]$

Beispiel

1. $\neg[\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w)) \rightarrow \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)]$
2. $\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w))$ $\quad [1_1, \alpha]$
3. $\neg \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)$ $\quad [1_2, \alpha]$
4. $\forall x \; p(x, a, f(x, a))$ $\quad [2(a), \delta]$

Beispiel

1. $\neg[\exists w \forall x\ p(x, w, f(x, w)) \rightarrow \exists w \forall x \exists y\ p(x, w, y)]$
2. $\exists w \forall x\ p(x, w, f(x, w))$ $[1_1, \alpha]$
3. $\neg \exists w \forall x \exists y\ p(x, w, y)$ $[1_2, \alpha]$
4. $\forall x\ p(x, a, f(x, a))$ $[2(a), \delta]$
5. $\neg \forall x \exists y\ p(x, v_1, y)$ $[3(v_1), \gamma]$

Beispiel

1.	$\neg[\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w)) \to \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)]$	
2.	$\exists w \forall x \; p(x, w, f(x, w))$	$[1_1, \alpha]$
3.	$\neg \exists w \forall x \exists y \; p(x, w, y)$	$[1_2, \alpha]$
4.	$\forall x \; p(x, a, f(x, a))$	$[2(a), \delta]$
5.	$\neg \forall x \exists y \; p(x, v_1, y)$	$[3(v_1), \gamma]$
6.	$\neg \exists y \; p(b(v_1), v_1, y)$	$[5(b(v_1)), \delta]$

Beispiel

1.	$\neg[\exists w \forall x\ p(x, w, f(x, w)) \to \exists w \forall x \exists y\ p(x, w, y)]$	
2.	$\exists w \forall x\ p(x, w, f(x, w))$	$[1_1, \alpha]$
3.	$\neg \exists w \forall x \exists y\ p(x, w, y)$	$[1_2, \alpha]$
4.	$\forall x\ p(x, a, f(x, a))$	$[2(a), \delta]$
5.	$\neg \forall x \exists y\ p(x, v_1, y)$	$[3(v_1), \gamma]$
6.	$\neg \exists y\ p(b(v_1), v_1, y)$	$[5(b(v_1)), \delta]$
7.	$p(v_2, a, f(v_2, a))$	$[4(v_2), \gamma]$

Beispiel

1.	$\neg[\exists w \forall x\ p(x, w, f(x, w)) \rightarrow \exists w \forall x \exists y\ p(x, w, y)]$	
2.	$\exists w \forall x\ p(x, w, f(x, w))$	$[1_1, \alpha]$
3.	$\neg \exists w \forall x \exists y\ p(x, w, y)$	$[1_2, \alpha]$
4.	$\forall x\ p(x, a, f(x, a))$	$[2(a), \delta]$
5.	$\neg \forall x \exists y\ p(x, v_1, y)$	$[3(v_1), \gamma]$
6.	$\neg \exists y\ p(b(v_1), v_1, y)$	$[5(b(v_1)), \delta]$
7.	$p(v_2, a, f(v_2, a))$	$[4(v_2), \gamma]$
8.	$\neg p(b(v_1), v_1, v_3)$	$[6(v_3), \gamma]$

7. und 8. sind (modulo Unifikation) komplementär:

$$v_2 \stackrel{?}{=} b(v_1),\ \ a \stackrel{?}{=} v_1,\ \ f(v_2, a) \stackrel{?}{=} v_3$$

ist lösbar mit mgu $\sigma = [a/v_1, b(a)/v_2, f(b(a), a)/v_3]$ und somit ist $T\sigma$ ein geschlossenes (lineares) Tableau für Formel 1.

Tableaus mit freien Variablen

Semantische Tableaux mit freien Variablen

Neue γ-Regel

$$\frac{\gamma}{\gamma(y)} \qquad \text{universell} \qquad \begin{array}{c} \forall x q(x) \\ | \\ q(y) \end{array}$$

wobei y eine neue freie Variable ist

Neue Abschlussregel

$$\frac{\begin{array}{c} L_1 \\ \\ \neg L_2 \end{array}}{\bot} \qquad \text{Widerspruch} \qquad \frac{\begin{array}{c} p(y) \\ \neg p(a) \end{array}}{\bot} \quad \text{mgu: } [a/y]$$

wobei L_1, L_2 unifizierbare Literale.

Tableaus mit freien Variablen

Semantische Tableaux mit freien Variablen

Neue γ-Regel

$$\frac{\gamma}{\gamma(y)} \qquad \text{universell} \qquad \begin{array}{c} \forall x q(x) \\ | \\ q(y) \end{array}$$

wobei y eine neue freie Variable ist

Neue Abschlussregel

$$\frac{\begin{array}{c} L_1 \\ \neg L_2 \end{array}}{\perp} \qquad \text{Widerspruch} \qquad \frac{\begin{array}{c} p(y) \\ \neg p(a) \end{array}}{\perp} \quad \text{mgu: } [a/y]$$

wobei L_1, L_2 unifizierbare Literale.

Nota bene: Allgemeinster Unifikator von L_1, L_2 wird auf das ganze Tableau angewendet.

Konvention

Wir nehmen an, dass die Menge der Variablen X in 2 disjunkte unendliche Teilmengen X_f und X_g partitioniert ist, und dass:

- Für gebundene Variablen nur solche aus X_g verwendet werden. (Vermeidet das Einfangproblem bei Substitution.)
- Die Variabeln, die durch die neue γ-Regel eingeführt werden immer aus Menge X_f gewählt sind.

Beispiel

1.	$(\exists x \forall y (p(x,y) \land q(x))) \land (\neg(\exists x (p(x,f(x))) \land \exists x q(x)))$	
2.	$\exists x \forall y (p(x,y) \land q(x))$	$[1_1, \alpha]$
3.	$\neg(\exists x (p(x,f(x))) \land \exists x q(x))$	$[1_2, \alpha]$
4.	$\forall y (p(sk_X, y) \land q(sk_X))$	$[2_1, \delta]$
5.	$p(sk_X, y_1) \land q(sk_X)$	$[4_1, \gamma]$
6.	$p(sk_X, y_1)$	$[5_1, \alpha]$
7.	$q(sk_X)$	$[5_2, \alpha]$

8.	$\neg(\exists x (p(x,f(x)))$	$[3_1, \beta]$	9.	$\neg \exists x q(x)$	$[3_2, \beta]$
10.	$\neg p(x_1, f(x_1))$	$[8_1, \gamma]$	11.	$\neg q(x_2)$	$[9_1, \gamma]$
	$\perp$			$\perp$	

$\{p(sk_x, y_1) \overset{?}{=} p(x_1, f(x_1),\ \ q(sk_x) \overset{?}{=} q(x_2)\} \Rightarrow^*_{MM} \{x_1 \overset{?}{=} sk_x,\ y_1 \overset{?}{=} f(sk_x),\ x_2 \overset{?}{=} sk_x\}$

$\sigma = [sk_x/x_1, f(sk_x)/y, sk_x/x_2]$ wird auf das ganze Tableau augewendet

$\mapsto$ Schluss beider Äste.