

Logik für Informatiker

3. Prädikatenlogik

Teil 10

19.07.2016

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

Ziel: Kalküle zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit (für Formeln und/oder Formelmengen)

- Normalformen, Skolemisierung

Kalküle

- Resolution
- Semantische Tableaux

Bis jetzt

Ziel: Kalküle zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit (für Formeln und/oder Formelmengen)

- Normalformen, Skolemisierung

Kalküle

- Resolution
- Semantische Tableaux

Formeltypen

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg F$
- $F \wedge G$
- $\neg(F \vee G)$
- $\neg(F \rightarrow G)$

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

| α | α_1 | α_2 |
|-------------------------|------------|------------|
| $F \wedge G$ | F | G |
| $\neg(F \vee G)$ | $\neg F$ | $\neg G$ |
| $\neg(F \rightarrow G)$ | F | $\neg G$ |
| $\neg\neg F$ | F | |

Disjunktive Formeln: Typ β

- $\neg(F \wedge G)$
- $F \vee G$
- $F \rightarrow G$

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

| β | β_1 | β_2 |
|--------------------|-----------|-----------|
| $\neg(F \wedge G)$ | $\neg F$ | $\neg G$ |
| $F \vee G$ | F | G |
| $F \rightarrow G$ | $\neg F$ | G |

Instanzen der α und β -Regel

Instanzen der α -Regel

$$\frac{P \wedge Q}{P}$$

Q

$$\frac{\neg(P \vee Q)}{\neg P}$$

$\neg Q$

$$\frac{\neg(P \rightarrow Q)}{P}$$

$\neg Q$

$$\frac{\neg\neg P}{P}$$

Instanzen der β -Regel

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q}$$

$$\frac{\neg(P \wedge Q)}{\neg P \mid \neg Q}$$

$$\frac{P \rightarrow Q}{\neg P \mid Q}$$

Widerspruch

ϕ

$\neg\phi$

\perp

Zusätzlich: Prädikatenlogische Formeltypen

| universell | | existentiell | |
|------------------|---------------|------------------|---------------|
| γ | $\gamma(t)$ | δ | $\delta(t)$ |
| $\forall xF$ | $F[t/x]$ | $\exists xF$ | $F[t/x]$ |
| $\neg\exists xF$ | $\neg F[t/x]$ | $\neg\forall xF$ | $\neg F[t/x]$ |

Zusätzlich: Prädikatenlogische Tableauregeln

γ -Regel

$$\frac{\gamma}{\gamma(t)}$$

universell

$$\frac{\forall x q(x)}{q(t)}$$

wobei t ein beliebiger Term ist.

δ -Regel

$$\frac{\delta}{\delta(f(y_1, \dots, y_n))}$$

existentiell

$$\frac{\exists x p(x, y_1, \dots, y_n)}{p(f(y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n)}$$

wobei f eine *neue* Skolemfunktion ist, und y_1, \dots, y_n die freien Variablen in δ sind.

Skolemisierung ist also ein Bestandteil des Kalküls und wird nicht als ein Vorverarbeitungsschritt vorausgesetzt. Aber natürlich könnte man ebensogut vorher Skolemisieren, was auch Vorteile haben kann.

Instanzen der γ und δ -Regel

Instanzen der γ -Regel

$$\frac{\forall x F(x)}{F(t)} \qquad \frac{\neg \exists x F(x)}{\neg F(t)}$$

Instanzen der δ -Regel

$$\frac{\exists x F(x, y_1, \dots, y_n)}{F(f(y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n)} \qquad \frac{\neg \forall x F(x, y_1, \dots, y_n)}{\neg F(f(y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n)}$$

wobei f eine *neue* Skolemfunktion ist und y_1, \dots, y_n die freien Variablen in $\exists x F(x, y_1, \dots, y_n)$ (resp. $\forall x F(x, y_1, \dots, y_n)$) sind.

Tableaus mit freien Variablen

Semantische Tableaux mit freien Variablen

Neue γ -Regel

$$\frac{\gamma}{\gamma(y)}$$

universell

$$\frac{\forall x q(x)}{q(y)}$$

wobei y eine **neue** freie Variable ist

Neue Abschlussregel

$$\frac{L_1 \quad \neg L_2}{\perp}$$

Widerspruch

$$\frac{p(y) \quad \neg p(a)}{\perp} \quad \text{mgu: } [a/y]$$

wobei L_1, L_2 unifizierbare Literale.

Tableaux mit freien Variablen

Semantische Tableaux mit freien Variablen

Neue γ -Regel

$$\frac{\gamma}{\gamma(y)} \quad \text{universell}$$

wobei y eine **neue** freie Variable ist

$$\frac{\forall x q(x)}{q(y)}$$

Neue Abschlussregel

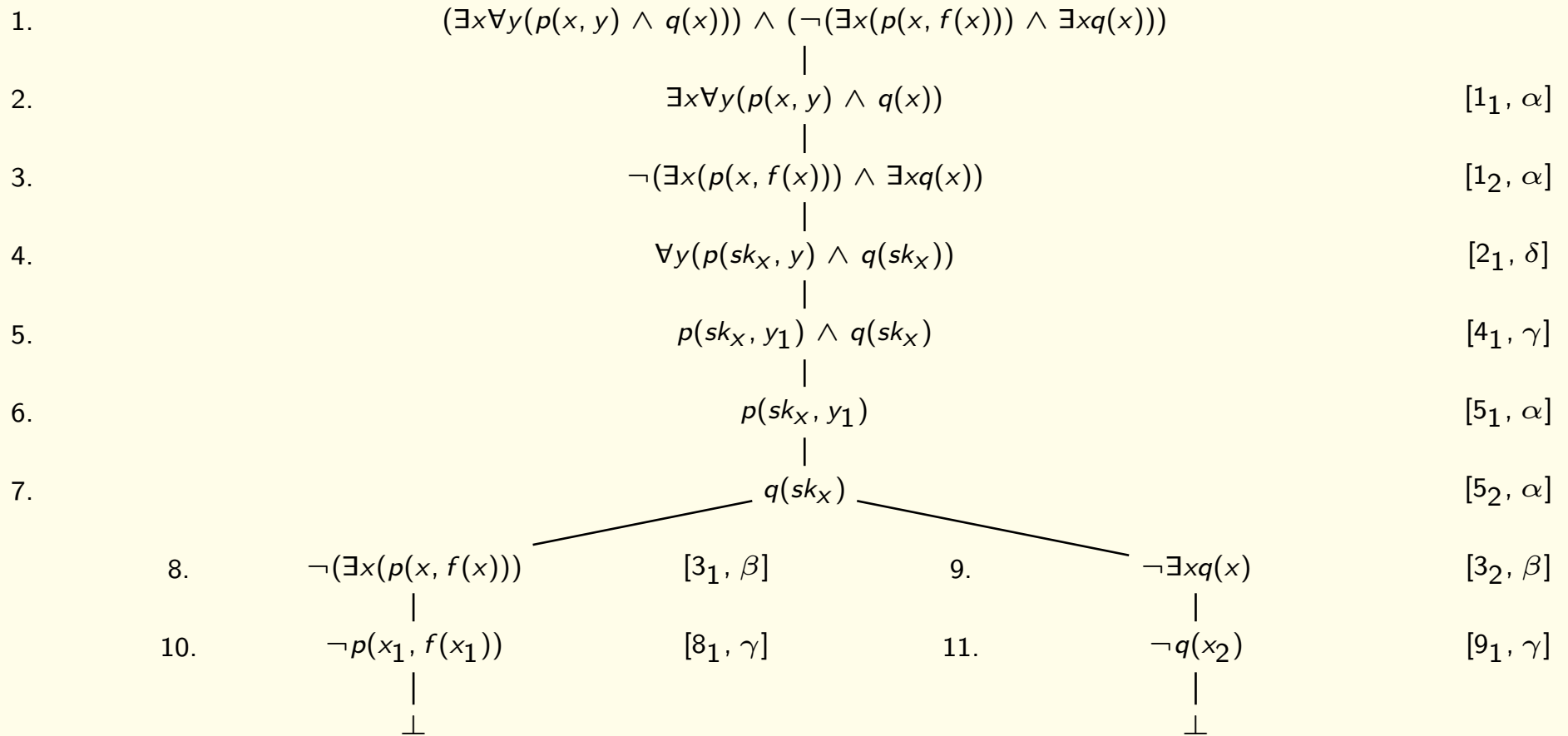
$$\frac{L_1 \quad \neg L_2}{\perp} \quad \text{Widerspruch}$$

wobei L_1, L_2 unifizierbare Literale.

$$\frac{p(y) \quad \neg p(a)}{\perp} \quad \text{mgu: } [a/y]$$

Nota bene: Allgemeinsten Unifikator von L_1, L_2 wird auf das ganze Tableau angewendet.

Beispiel



$$\{p(sk_x, y_1) \stackrel{?}{=} p(x_1, f(x_1)), q(sk_x) \stackrel{?}{=} q(x_2)\} \Rightarrow_{MM}^* \{x_1 \stackrel{?}{=} sk_x, y_1 \stackrel{?}{=} f(sk_x), x_2 \stackrel{?}{=} sk_x\}$$

$\sigma = [sk_x/x_1, f(sk_x)/y, sk_x/x_2]$ wird auf das ganze Tableau angewendet

\mapsto Schluss beider Äste.

Formale Definition des Kalküls

Definition

Tableau: Binärer Baum, dessen Knoten mit Formeln markiert sind

Definition

Tableauast: Maximaler Pfad in einem Tableau (von Wurzel zu Blatt)

Definition: Tableau (mit freien Variablen)

Sei $M = \{F_1, \dots, F_n\}$ eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- T ein Tableau für M
- B ein Ast von T
- F eine Formel auf B oder in M , die kein Literal ist
- T' entstehe durch Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel (α , β , γ oder δ)

Dann ist T' ein Tableau für M .

Substitutionsregel

- Ist T ein Tableau für M und
- ist σ eine Substitution,

so ist auch $T\sigma$ ein Tableau für M .

Formale Definition des Kalküls

Nota bene:

Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M

Definition.

Ast B eines Tableaus für M ist **geschlossen**, wenn

$$F, \neg F \in B$$

Definition.

Ein Tableau ist **geschlossen**, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist.

Definition.

Ein Tableau für M , das geschlossen ist, ist ein Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M

Prädikatenlogische Klauseltableaux

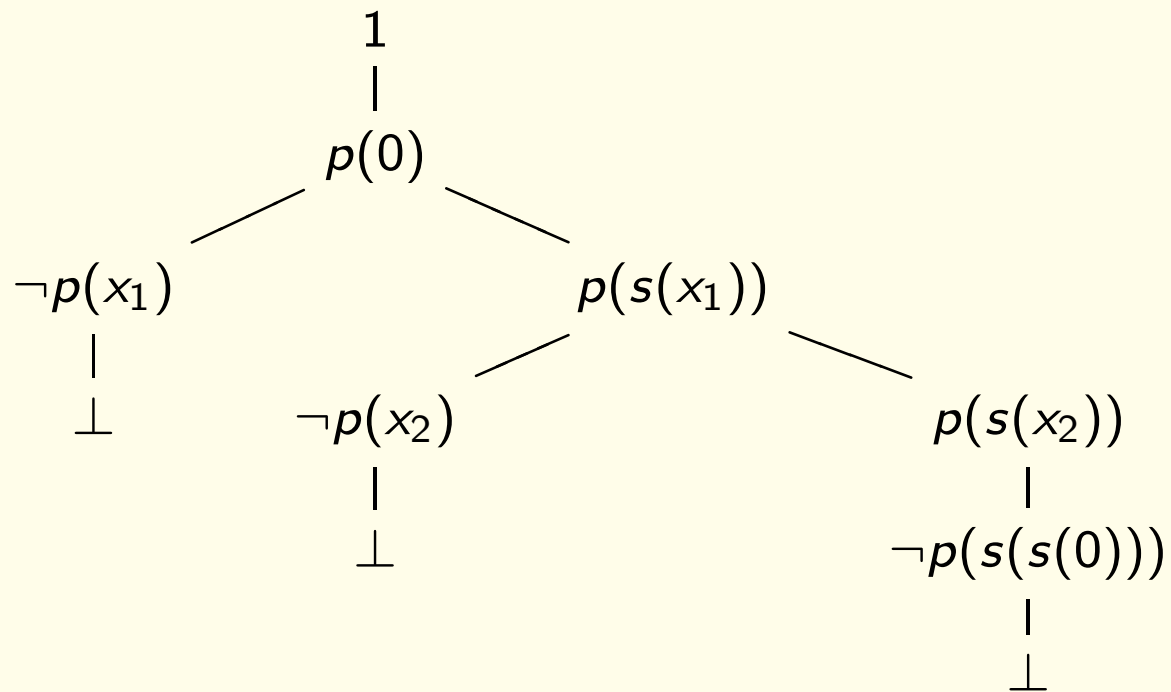
Klauseltableaux für eine Klauselmeng S

- Abschlussregel wie zuvor
- Keine α , keine δ -Regel
- β - und γ -Regel zusammengefasst:
 - Sei B ein Ast in T
 - Sei $C = \{L_1, \dots, L_n\}$ eine Klausel in S
 - Sei $C' = C\sigma = \{L'_1, \dots, L'_n\}$ aus C durch Variablenumbenennung

Dann kann B erweitert werden, indem n Blätter mit L'_1, \dots, L'_n angehängt werden.

Beispiel

$$S = \{ \{ p(0) \}, \{ \neg p(x), p(s(x)) \}, \{ \neg p(s(s(0))) \} \}$$



$$\{ p(0) \stackrel{?}{=} p(x_1), p(x_2) \stackrel{?}{=} p(s(x_1)), p(s(x_2)) \stackrel{?}{=} p(s(s(0))) \}$$

mgu: $\sigma = [0/x_1, s(0)/x_2] \mapsto$ Schluss aller Äste.

Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem

Eine Formelmenge M ist unerfüllbar
genau dann, wenn
es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt.

Korrektheit

Bei gegebener Signatur Σ bezeichnen wir mit Σ^{sko} das Ergebnis der Hinzunahme unendlich vieler neuer Skolemfunktionen zu Σ , die wir in der δ -Regel verwenden dürfen.

Sei \mathcal{A} eine Σ^{sko} -Interpretation, T ein Tableau, und β eine Variablenbelegung über \mathcal{A} .

Definition. T heißt **(\mathcal{A}, β) -erfüllt**, wenn es einen Pfad P_β in T gibt, so dass $\mathcal{A}, \beta \models F$, für jede Formel F auf P_β .

Definition. T heißt **erfüllbar**, falls es ein \mathcal{A} gibt, so dass für jede Variablenbelegung β das Tableau T (\mathcal{A}, β) -erfüllt ist. (D.h. wir dürfen P_β in Abhängigkeit von β wählen.)

Korrektheit

Sei $M = \{F_1, \dots, F_n\}$ eine Formelmenge (so dass F_i keine freien Variablen enthält).

Theorem

Sei T ein Tableau für $\{F_1, \dots, F_n\}$.

$\{F_1, \dots, F_n\}$ erfüllbar genau dann, wenn T erfüllbar.

Beweis:

“ \Leftarrow ”: Falls T erfüllbar, so gibt es eine Struktur \mathcal{A} , so dass für jede Variablenbelegung β das Tableau T (\mathcal{A}, β) -erfüllt ist,

d.h. es gibt einen Pfad P_β in T , so dass $\mathcal{A}, \beta \models F$, für jede Formel F auf P_β .

Dann ist aber leicht zu sehen, dass $\mathcal{A}, \beta \models M$ (Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M).

Korrektheit

Sei $M = \{F_1, \dots, F_n\}$ eine Formelmenge (so dass F_i keine freien Variablen enthält).

Theorem

Sei T ein Tableau für $\{F_1, \dots, F_n\}$.

$\{F_1, \dots, F_n\}$ erfüllbar genau dann, wenn T erfüllbar.

Beweis von " \Rightarrow " durch Induktion über die Tiefe von T .

Tableau mit Tiefe 1 (mit einem Knoten) erfüllbar wenn $\{F_1, \dots, F_n\}$ erfüllbar.

Induktionsvoraussetzung: Implikation gilt für alle Tableaux mit Tiefe $\leq n$.

Induktionsschritt: Sei T ein Tableau mit Tiefe $n + 1$. T entsteht durch eine Erweiterung mit einer α, β, γ oder δ -Regel aus einem Tableau mit Tiefe $\leq n$.

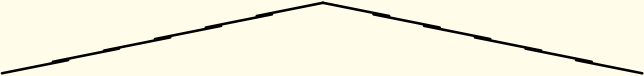
α/β -Regeln: Beweis wie für Aussagenlogik; γ -Regel: Offensichtlich.

Bei δ müssen die Ideen aus dem Beweis der Bewahrung von Erfüllbarkeit bei Skolemisierung verwendet werden.

Striktheitbedingung

Definition. Ein Tableau ist **strikt**, falls für jede Formel F die entsprechende Erweiterungsregel höchstens einmal auf jeden Ast, der die Formel enthält, angewandt wurde.

Striktheitsbedingung für γ unvollständig

| | | |
|--|---|--------------------|
| 1. | $\neg[\forall x p(x) \rightarrow (p(a) \wedge p(b))]$ | |
| 2. | $\forall x p(x)$ | $[1_1, \alpha]$ |
| 3. | $\neg(p(a) \wedge p(b))$ | $[1_2, \alpha]$ |
| 4. | $p(v_1)$ | $[2(v_1), \gamma]$ |
|  | | |
| 5. | $\neg p(a)$ | $[3_1, \beta]$ |
| 6. | $\neg p(b)$ | $[3_2, \beta]$ |

Würde die Striktheitsbedingung für γ gelten, wäre das Tableau nur noch durch Anwendung der Substitutionsregel weiter expandierbar. Aber es gibt keine Substitution (für v_1), unter der beide Pfade gleichzeitig abgeschlossen werden können.

Wie oft muss γ angewendet werden?

Theorem

Es gibt keine berechenbare Funktion $f : For_{\Sigma} \times For_{\Sigma} \rightarrow \mathbb{N}$, so dass, falls eine Satzform F unerfüllbar, es ein geschlossenes Tableau für F gibt, wobei für Formeln $\forall xG$, die in T vorkommen, die γ -Regel auf jedem Pfad, auf dem $\forall xG$ vorkommt, höchstens $f(F, \forall xG)$ -mal angewendet worden ist.

Sonst wäre Unerfüllbarkeit bzw. Gültigkeit in Logik erster Stufe entscheidbar, weil man nur Tableaux in einer Tiefe aufzählen müsste, die durch f beschränkt wird. Daher sind Tableaux mit freien Variablen i.allg. notwendigerweise unbeschränkt in ihrer Tiefe.

\forall wirkt wie eine unendliche Konjunktion. Durch iteratives Anwenden von γ , in Verbindung mit der Substitutionsregel, können alle Instanzen $F[t/x]$ aufgezählt und untereinander, also konjunktiv, in jedem Pfad durch $\forall xF$ eingesetzt werden.

Vollständigkeit

Theorem

$\{F_1, \dots, F_n\}$ erfüllbar genau dann, wenn es kein geschlossenes, striktes (mit Ausnahme von γ) AMGU-Tableau für $\{F_1, \dots, F_n\}$ gibt.

Beweis (Idee, Klauseltableaux)

Zum Beweis definiert man einen fairen Tableaux-Expansionsprozess, der gegen ein unendliches Tableau konvergiert, wo auf jedem Pfad jede γ -Formel in alle Varianten (modulo Wahl der freien Variablen) expandiert wurde. Man kann dann wieder zeigen, dass alle Pfade bis auf Redundanz unter Resolution saturiert sind. Hierzu verwendet man die Lifting-Argumente für Resolutionsinferenzen, um die AMGU-Einschränkung als vollständig zu beweisen.

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

- Vollständigkeit der Tableauregeln garantiert nur Existenz eines geschlossenen Tableaus.
- Eine systematische Beweissuchprozedur ist notwendig, um einen Beweis zu finden.

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

- Vollständigkeit der Tableauregeln garantiert nur Existenz eines geschlossenen Tableaus.
- Eine systematische Beweissuchprozedur ist notwendig, um einen Beweis zu finden.

Tableaukonstruktion ist nicht-deterministisch: Choice points

- Nächster zu betrachtender Ast?
- Abschluss- oder Erweiterung?
- Falls Abschluss: Mit welchem Literal-Paar?
- Falls Erweiterung: Mit welcher Formel?

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

Schlechte Wahl kann das Finden eines Beweises verhindern!

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

Schlechte Wahl kann das Finden eines Beweises verhindern!

Harmlos: Astauswahl

Beliebige Strategie (z.B. links nach rechts) führt zum Erfolg

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

Schlechte Wahl kann das Finden eines Beweises verhindern!

Harmlos: Astauswahl

Beliebige Strategie (z.B. links nach rechts) führt zum Erfolg

Mit Fairnessstrategie handhabbar: Formelauswahl

Jede Formel auf jedem Ast, γ -Formeln beliebig oft

Vom Kalkül zur Beweissuchprozedur

Schlechte Wahl kann das Finden eines Beweises verhindern!

Harmlos: Astauswahl

Beliebige Strategie (z.B. links nach rechts) führt zum Erfolg

Mit Fairnessstrategie handhabbar: Formelauswahl

Jede Formel auf jedem Ast, γ -Formeln beliebig oft

Kritisch: Abschluss erfordert Backtracking

Alternativ: Keinen Abschluss machen, bis sich alle Äste zugleich schließen lassen

Beispiel

Unfaire Bevorzugung einer Formel

$\forall x p(x)$

|

$q \wedge \neg q$

|

$p(X_1)$

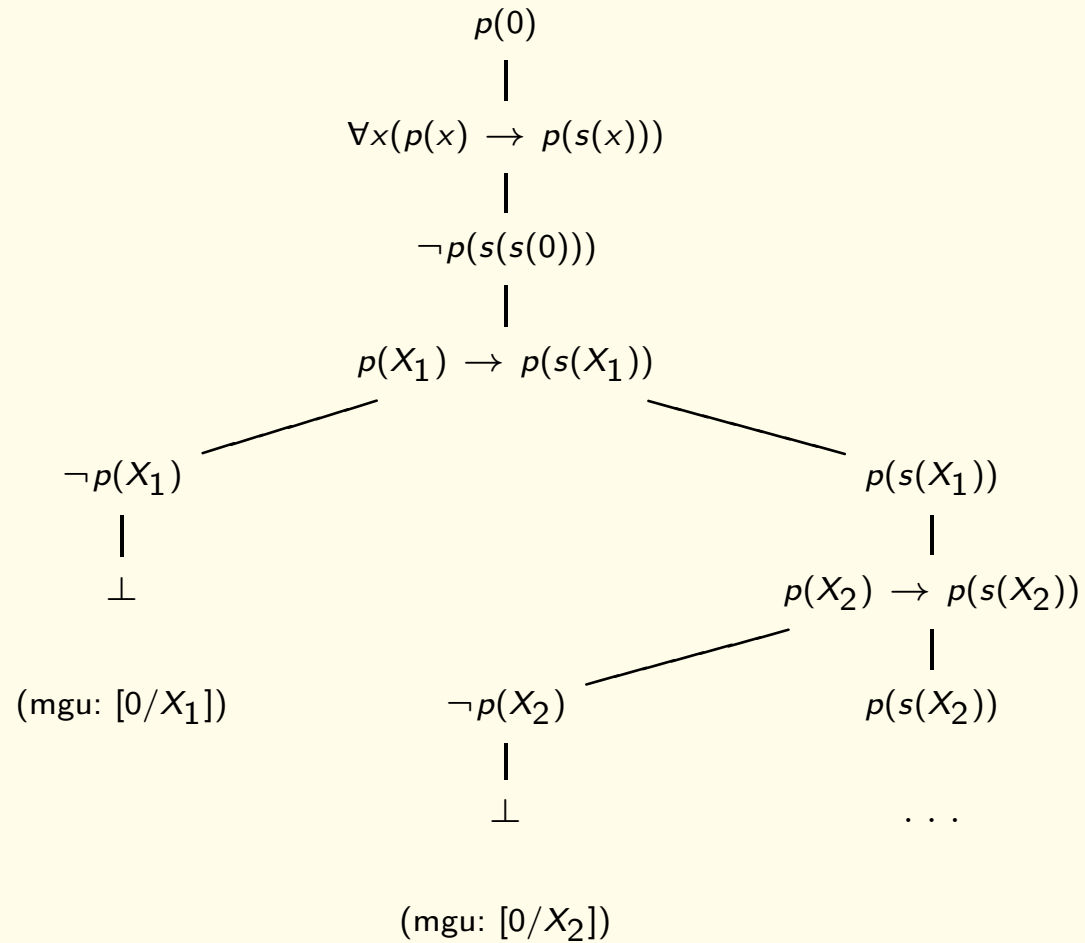
|

$p(X_2)$

...

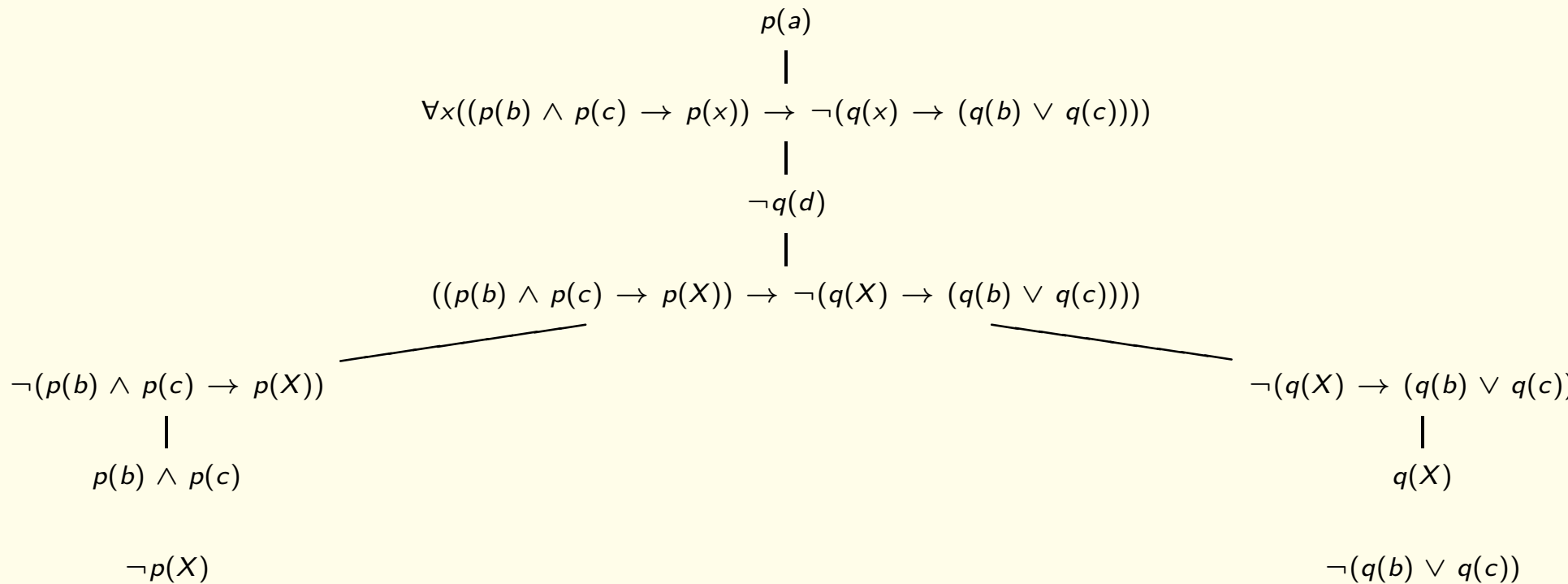
Beispiel

Bevorzugung eines Abschlusses



Beispiel

Abschluss statt Erweiterung



Semantische Tableaux

- Zu zeigen: F (un)erfüllbar
- Zu zeigen: F allgemeingültig
- Zu zeigen: $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \models F$

Semantische Tableaux

- Zu zeigen: F unerfüllbar
 Bilde geschlossenes Tableau für F .
- Zu zeigen: F allgemeingültig
- Zu zeigen: $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \models F$

Semantische Tableaux

- Zu zeigen: F unerfüllbar
Bilde geschlossenes Tableau für F .
- Zu zeigen: F allgemeingültig
Zeige, dass $\neg F$ unerfüllbar
- Zu zeigen: $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \models F$

Semantische Tableaux

- Zu zeigen: F unerfüllbar
Bilde geschlossenes Tableau für F .
- Zu zeigen: F allgemeingültig
Zeige, dass $\neg F$ unerfüllbar
- Zu zeigen: $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \models F$
Zeige, dass $F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n \wedge \neg F$ unerfüllbar

Zusammenfassung

Prädikatenlogische Tableauregeln

- γ - und δ -Regel
- Determinismus der Regeln
- Tableaux mit freien Variablen
neue γ - und neue Abschlussregel
- Prädikatenlogische Klauseltableaux
- Beweissuchprozedur